

GeoGebra 5 for Ungdomsskole og VGS

Om du trenger å installere GeoGebra 5 gå til:

<https://www.geogebra.org/download>

Installasjon:

Om du skal installere det på MAC så kan det være litt vanskelig, det kan derfor være en fordel å se på videoen i linken under for hvordan en installerer GeoGebra 5 på MAC.

<https://youtu.be/jqPEdZJpaus>

Oppsett:

Når vi jobber med GeoGebra 5 så har vi den enorme fordelen at vi kan jobbe med et eget oppsett vi kan tilpasse selv (GeoGebra 6 har dessverre ikke denne muligheten). Bare vi trykker på «lagre innstillinger» så vil ditt foretrukket oppsettet komme frem gang på gang. For å hjelpe i starten har jeg laget en YouTube-video med mitt eget oppsett som du kan benytte til du finner noe bedre for deg.

<https://youtu.be/jeuDO2PluAI?si=t-eww4TZ8x48gSOn>

NB! FOR Å LÆRE MEST MULIG IFRA DETTE HEFTET SÅ ER DET MEGET NYTTIG Å SKRIVE AV CAS-DELEN I EKSEMPLENE SELV.



Vanlige CAS-regne operatorer

EKSEMPEL 1



Bruk CAS til å løse oppgavene:

- a) $5 + 3$
- b) $3.1 - 5$

Løsning:

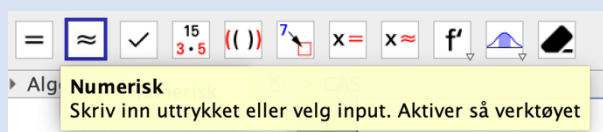
- a) Vi skriver inn i CAS og trykker Enter og leser av svaret.

1	$5+3$
•	$\rightarrow 8$

- b) Om vi bare gjør det samme for $3.1 - 5$ så får vi et svar på brøkform:

2	$3.1-5$
•	$\rightarrow \frac{-19}{10}$

Dette kan virke litt rart og instinktivt ønsker vi oss kanskje et svar på desimalform. Da kan vi trykke i CAS vinduet der vi skrev $3.1 - 5$ og trykke på knappen «Numerisk» markert under:



Vi får da:

3	$3.1-5$
•	≈ -1.9

Oppgave 1

Bruk CAS til å løse oppgavene under.

NB: Husk formålet er å lære seg å bruke CAS i GeoGebra, det er derfor viktig at du gjennomfører oppgavene selv om du kan svarene på oppgavene ifra før)

a) $43 + 81$

b) $4.3 - 99$
Gi svaret som brøk.
NB: I CAS skriver vi 4.3
og ikke 4,3.

c) $4.3 - 99$
Gi svaret som desimaltall.



EKSEMPEL 2



<https://GG5e02.studenthjelp.no/>

Bruk CAS til å løse oppgavene:

- a) $4 \cdot 2$
- b) $14 \div 4$

Løsning:

- a) Når vi skal gange to tall benytter vi oss av * for å gange.

4	$4 \cdot 2$
☐	≈ 8

- b) Når vi skal løse $14 \div 4$ eller $\frac{14}{4}$ skriver vi 14/4 i GeoGebra. Ønsker vi svaret numerisk trykker vi $\approx$

5	14/4
☐	≈ 3.5

Ettersom vi i oppgave b) trykket på numerisk knappen så har vi fått et svar på desimalform.

Om vi derimot ønsker et brøkuttrykk som svar (altså om vi ønsker på svarer på «eksakt form» istedenfor numerisk) så kan vi trykke der vi skrev 14/4 og deretter trykke oss tilbake til «symbolsk utregning»:

$=$	$\approx$	$\checkmark$	$\frac{15}{3 \cdot 5}$	$(())$	$\frac{7}{\square}$	$x =$	$x \approx$	f'		
Symbolsk utregning Skriv inn uttrykk eller velg input og aktiver deretter verktøyet										

Vi får da svaret:

6	14/4
☐	$\rightarrow \frac{7}{2}$

Oppgave 2

Bruk CAS til å regne ut

a $14 \cdot 3$

b $82/4$
Gi svaret i brøkform.

c $82/4$
Gi svaret som desimaltall.



Flere regneoperatorer

EKSEMPEL 3



Bruk CAS til å legge løse oppgavene:

- a) 5^2
- b) $\sqrt{36}$
- c) $|-12|$

Løsning:

- a) For å skrive 5^2 i CAS kan vi velge imellom å skrive $5 ** 2$ og 5^2

1	$5 ** 2$
☐	→ 25
2	5^2
☐	→ 25

For mange som benytter MAC kan det å trykke på ^-knappen lede til trøbbel og ** kan derfor være enklere å benytte.

- b) For å finne $\sqrt{36}$ i GeoGebra skriver vi *sqrt*(36) sqrt er en forkortelse for engelske «squareroot» (altså kvadratrot)

3	<i>sqrt</i> (36)
☐	→ 6

Det går også an å benytte seg av snarveien **alt+r** (PC) eller **crtl+r** (MAC). Her er «r» en forkortelse for engelske root.

4	$\sqrt{36}$
☐	→ 6

- c) For å finne absoluttverdien av -12 kan vi enten skrive *abs*(-12) eller skrive $|-12|$ direkte inn i GeoGebra. For å skrive $|$ på MAC trykker du **option+7**.

5	<i>abs</i> (-12)
☐	→ 12
6	$ -12 $
☐	→ 12

Oppgave 3

Bruk CAS til å regne ut oppgavene under.

Prøv ditt beste å regne ut hver av oppgavene på begge måtene vist over.

a 12^2

b $\sqrt{196}$

c $|-31|$



Hvordan løse enkle likninger i CAS:

EKSEMPEL 4



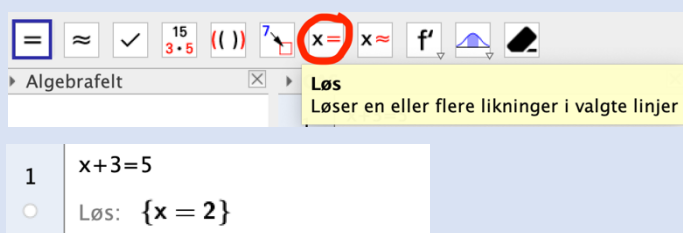
<https://GG5e04.studenthjelp.no/>

Bruk CAS til å løse likningene:

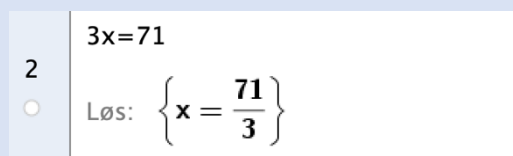
- a) $x + 3 = 5$
- b) $3x = 71$
- c) $\frac{x}{2} = 3$

Løsning:

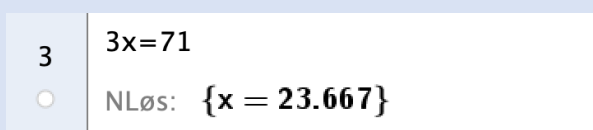
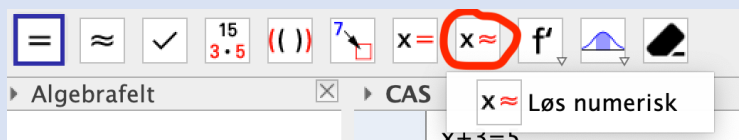
- a) Vi skriver direkte inn i CAS og benytter oss av -knappen istedenfor å trykke på Enter når vi har skrevet inn uttrykket:



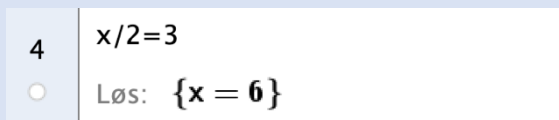
- b) Vi skriver inn likningen og trykker på Løs (altså )



Noen ganger ønsker vi oss et numerisk svar vi kan da benytte oss av knappen «Løs numerisk»



- c) Vi løser nok engang ved å skrive inn og trykke på: 



Oppgave 4

Løs likningene under ved å bruke CAS

a $x - 19 = 131$

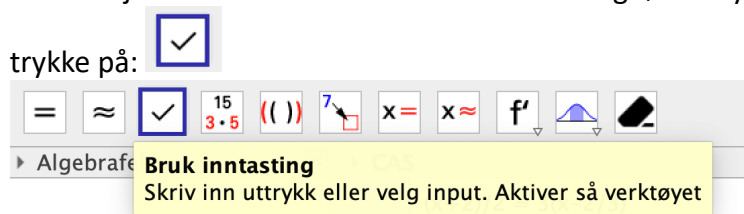
b $10x = 64$
Løs både vanlig og numerisk

c $\frac{x}{5} = 1.5$
Løs både vanlig og numerisk



Hvordan skrive inn og løse mer avanserte likninger i CAS:

Når vi skal skrive inn mer avanserte likninger i GeoGebra 5 så vil det være fordelaktig å dobbeltsjekke om det vi har skrevet inn er riktig før vi trykker «Løs». Det kan vi gjøre ved å



EKSEMPEL 5



<https://GG5e05.studenthjelp.no/>

Løs likningene under. Pass først på at du har skrevet likningen riktig ved å benytte  knappen, løs deretter likningene.

- a) $\frac{x+2}{2} = 3(x - \frac{2}{3})$
b) $2^{x+1} = 8$

Løsning:

a) $\frac{x+2}{2} = 3(x - \frac{2}{3})$

Vi benytter først  knappen

1 $(x+2)/2 = 3(x-2/3)$
☒ $\checkmark \frac{x+2}{2} = 3(x - \frac{2}{3})$

Det ser riktig ut. Vi trykker oss tilbake inn i CAS vindu 1 og trykker på  knappen for å løse likningen.

1 $(x+2)/2 = 3(x-2/3)$
☐ Løs: $\{x = \frac{6}{5}\}$

Vi ser at vi får brøksvar. Om vi ønsker løsningen numerisk trykker vi på .

1 $(x+2)/2 = 3(x-2/3)$
☐ NLøs: $\{x = 1.2\}$

b) $2^{x+1} = 8$

Vi skriver inn og benytter oss av 

2 $2^{**}(x+1)=8$
☐ $\checkmark 2^{x+1} = 8$

For å løse trykker vi oss tilbake inn i CAS-vinudet og trykker .

2 $2^{**}(x+1)=8$
☐ Løs: $\{x = 2\}$



Oppgave 5

Løs likningene ved å bruke CAS

a $\frac{x-3}{2} = 3$

b $3^{x-1} = 27$

c $\frac{2x-1}{3} = 2(x + \frac{3}{4})$

EKSEMPEL 6



<https://GG5e06.studenthjelp.no/>

Løs likningene under. Pass først på at du har skrevet likningen riktig ved å benytte ☒ knappen, løs deretter likningene. Gi svarene både som heltall og desimaltall der det er aktuelt.

a) $\frac{3}{2}(x-3) = 0$

b) $\frac{3}{x-2} = 4$

Løsning:

a) $\frac{3}{2}(x-3) = 0$

3	$3/2*(x-3)=0$
☒	$\sqrt{\frac{3}{2}(x-3)} = 0$

3	$3/2*(x-3)=0$
☐	Løs: $\{x = 3\}$

b) $\frac{3}{x-2} = 4$

4	$3/(x-2)=4$
☒	$\sqrt{\frac{3}{x-2}} = 4$

4	$3/(x-2)=4$
☐	Løs: $\left\{x = \frac{11}{4}\right\}$

Når vi skriver \$4 inn i CAS så s

5	\$4
☐	NLøs: $\{x = 2.75\}$

Oppgave 6

Løs likningene ved å bruke CAS

a $\frac{1}{5}(2x-8) = 0$

b $3x - \frac{2}{3}(x+1) = x$

c $\frac{3}{x-5} + 2(x+1) = 2$



EKSEMPEL 7



<https://GG5e07.studenthjelp.no/>

Bruk CAS til å løse likningen:

$$x^2 - 4 = 0$$

Løsning:

Noen likninger vil gi mer enn ett svar. Disse kan også løses enkelt i CAS ved å

benytte seg av  knappen. Skal vi løse $x^2 - 4 = 0$ skriver vi:

4	$x^{**2}-4=0$
☐	Løs: $\{x = -2, x = 2\}$

Oppgave 7

Løs likningene ved å bruke CAS

a $x^2 - 9 = 0$

b $x^2 + 5x + 6 = 0$

c $x^2 = -3x - 2$

Hvordan definere variabler med verdier, punkter og funksjoner i CAS

Noen ganger ønsker vi å lagre en spesifikk verdi eller en funksjon som kan oppnå mange verdier i CAS. Måten vi gjør dette er ved å benytte oss av $:=$. Skriver vi $a := 4$ så har vi lagret verdien 4 i variabelen a . Vi kan deretter skrive $a + 2$ og GeoGebra vil returnere svaret 6 til oss. En av fordelene ved dette er at vi på et hvilket som helst tidspunkt kan endre verdien til a og verdien til $a + 2$ vil oppdatere seg automatisk.

Skriver vi dette så vil også $a = 2$ automatisk dukke opp i Algebrafeltet.

Algebrafelt	CAS
☐ $a = 2$	1 $a:=2$
	☐ $\rightarrow a := 2$

EKSEMPEL 8



<https://GG5e08.studenthjelp.no/>

Definer $k = 5$ i CAS og bruk k til å finne ut hva $5 + 2$ er.

Løsning:

1	$k:=5$
☐	$\rightarrow k := 5$
2	$k+2$
☐	$\rightarrow 7$



Oppgave 8

Sett $a := 2$ i CAS. Bruk nå a istedenfor 2 til å løse følgende oppgaver i CAS. (c er en likning)

$a \quad 2^3$

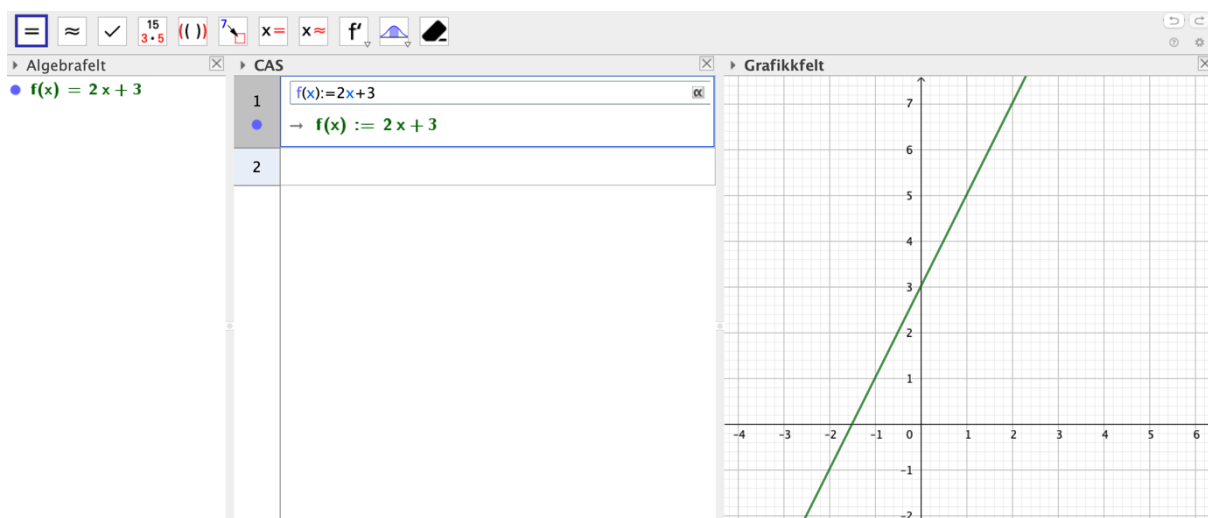
$b \quad 2 + 2 * 3 + 2^4$

$c \quad 2^3 - x = 2 + 10$

Å definere en funksjon i CAS

Vi ønsker noen ganger å definere funksjoner i CAS. Gjør vi dette får vi fordelen at de lagres i Algebrafeltet slik at vi kan benytte oss av dem til senere utregninger i tillegg så tegnes grafen til funksjonen automatisk opp i Grafikkfeltet (Dersom det er mulig å tegne den)

Når vi skal definere en funksjon skriver vi også $:=$ om vi derfor ønsker å tegne funksjonen $f(x) = 2x + 3$ skriver vi $f(x) := 2x + 3$ i GeoGebra. GeoGebra tegner da linjen f som har stigningstallet 2 og konstantleddet 3. Denne linjen ser du tegnet i grønt under.

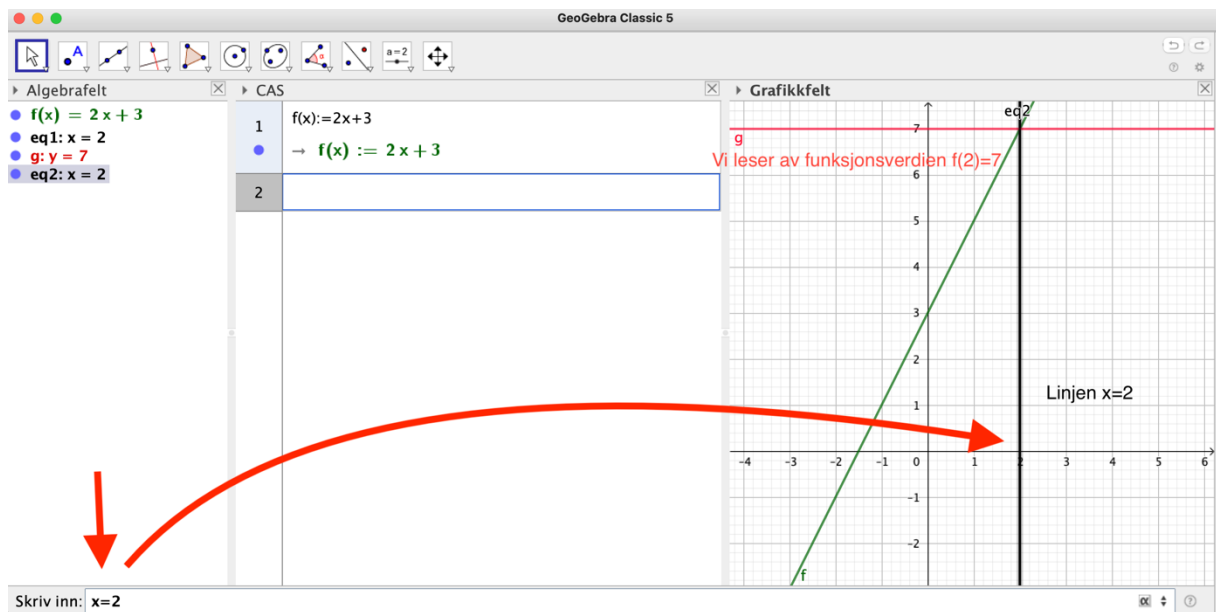


Å lese av funksjonsverdier med grafen

Nå når vi har definert en funksjon så kan vi finne funksjonsverdiene for forskjellige x -verdier veldig enkelt. Dersom vi ønsker å finne funksjonsverdien til $f(x)$ når $x = 2$ kan vi lese av på grafen at funksjonsverdien da blir 7. Dette kan vi gjøre ved å lese av y -verdien til $f(x)$ når x -verdien er 2.

På bildet under bruker vi «Skriv inn» feltet for å lage en vertikal linje som går der $x = 2$. Vi har også tegnet en rød linje for $y = 7$ som viser hvor vi leser av funksjonsverdien når $x = 2$.





Å finne funksjonsverdien direkte med CAS

En enklere måte å finne funksjonsverdien uten å bry seg med å lese av verdien i grafikkfeltet er å lese den av direkte i CAS.

Ifra tidligere vet du kanskje at når $f(x) = 2 \cdot x + 3$ og vi ønsker å finne verdien til funksjonen når $x = 2$ så bytter vi ut x i funksjonen med 2. Vi får altså $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$.

I CAS er det enda enklere. Vi trenger der bare å definere funksjonen først, deretter kan vi skrive inn så mange verdier vi vil og finne funksjonsverdien raskt og enkelt. Vi trenger bare å skrive inn $f(2)$ og vi får resultatet direkte.

CAS	
1	$f(x) := 2x + 3$
•	$\rightarrow f(x) := 2x + 3$
2	$f(2)$
○	$\rightarrow 7$



EKSEMPEL 9

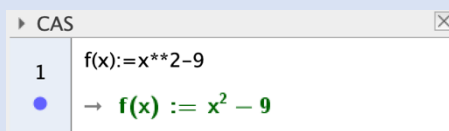


<https://GG5e09.studenthjelp.no/>

- Definer funksjonen $f(x) = x^2 - 9$ i CAS.
- Finn funksjonsverdien når $x = 2$ først grafisk og deretter med CAS.

Løsning:

- Vi skriver inn i CAS

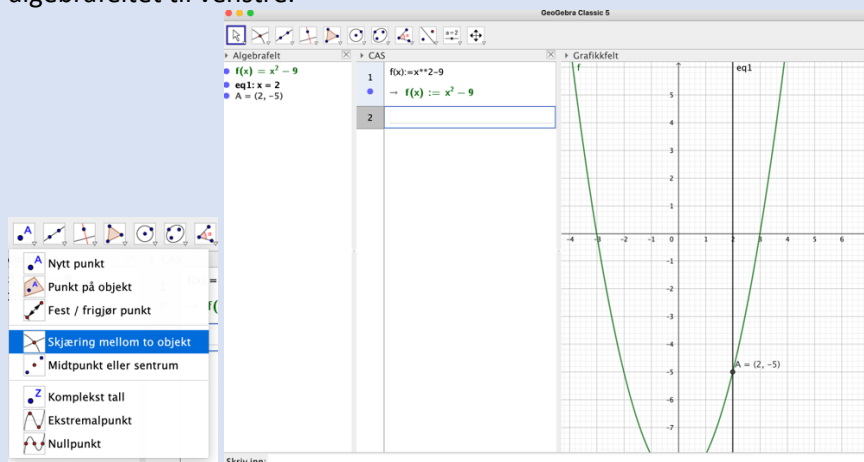


- Vi skriver inn $x = 2$ i «skriv inn» feltet nederst og ser det blir tegnet opp en vertikallinje.



Vi trykker oss deretter inn i grafikkfeltet og trykker så på «Nytt punkt» og velger «Skjæring mellom to objekt»

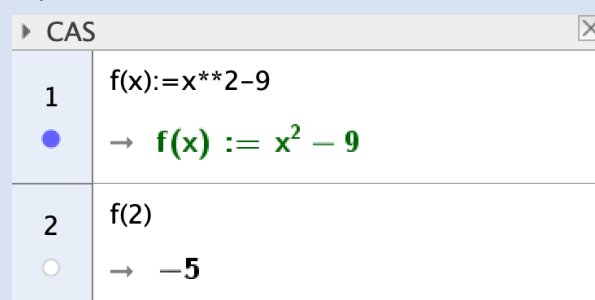
Vi trykker så på linjen $x = 2$ og grafen til $f(x) = x^2 - 9$ i grafikkfeltet. Det dukker da opp et skjæringspunkt $A = (2, -5)$ i grafikkfeltet og i algebrafeltet til venstre.



Punktet $(2, -5)$ forteller oss at når x -verdien er 2 så er funksjonsverdien $f(2) = -5$.

Med CAS:

Om vi ønsker å finne funksjonsverdien direkte med CAS skriver vi $f(2)$ og trykker Enter.



Oppgave 9

Finn funksjonsverdien når $x = 2$ grafisk og med CAS for:

a $f(x) = x^2$

b $f(x) = -2x + 8$

c $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$

Å løse likninger Grafisk og med CAS

Å løse funksjonslikninger direkte med CAS

Vi kan også benytte CAS til å finne x -verdien som gir en bestemt funksjonsverdi for $f(x)$. Vi vet på forhånd at $f(x) = 7$ (altså $2x + 3 = 7$) når $x = 2$. Dette kan vi vise med CAS ved å skrive inn $f(x) = 7$ og deretter løse dette som en likning (altså trykke på )

3	$f(x)=7$
☐	Løs: $\{x = 2\}$

EKSEMPEL 10



<https://GG5e10.studenthjelp.no/>

- a) Definer funksjonen $f(x) = 2x - 5$ i CAS.
- b) Løs likningen $f(x) = 1$ først grafisk og deretter med CAS.

Løsning:

a)

CAS	
1	$f(x) := 2x - 5$
☒	$\rightarrow f(x) := 2x - 5$

b) Med grafikkfelt:

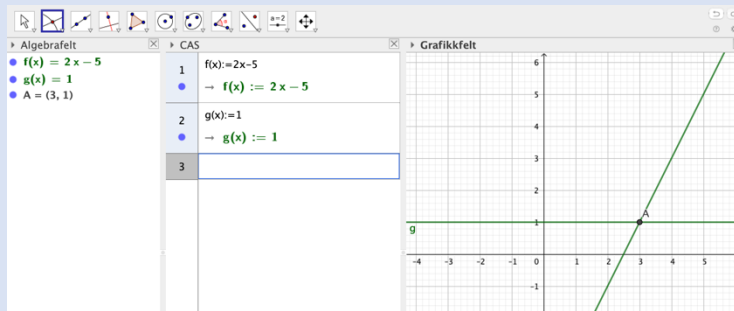
Vi definerer en ny funksjon $g(x) := 1$ slik at den tegnes i grafikkfeltet.

2	$g(x) := 1$
☒	$\rightarrow g(x) := 1$

(NB: Vi kunne også ha skrevet $y = 1$ i «skriv inn» feltet.)

Dette blir en horisontal linje som går igjennom $f(x)$ der funksjonsverdien er lik 1. Vi finner skjæringspunktet imellom $g(x)$ og $f(x)$ ved å bruke «skjæring imellom 2 objekt» slik som i forrige eksempel:



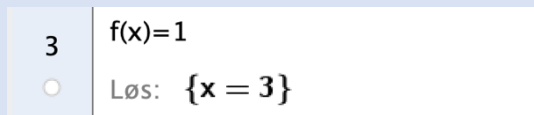


Vi leser av x-verdien til punkt $A = (3, 1)$ (som vi ser i algebrafeltet) den er 3. Når $f(x) = 1$ er altså $x = 3$.

Med CAS:

Om vi ønsker å løse direkte i CAS kan vi bare skrive inn $f(x) = 1$ og

trykke  knappen.



Oppgave 10

Løs likningen $f(x) = 5$ når:

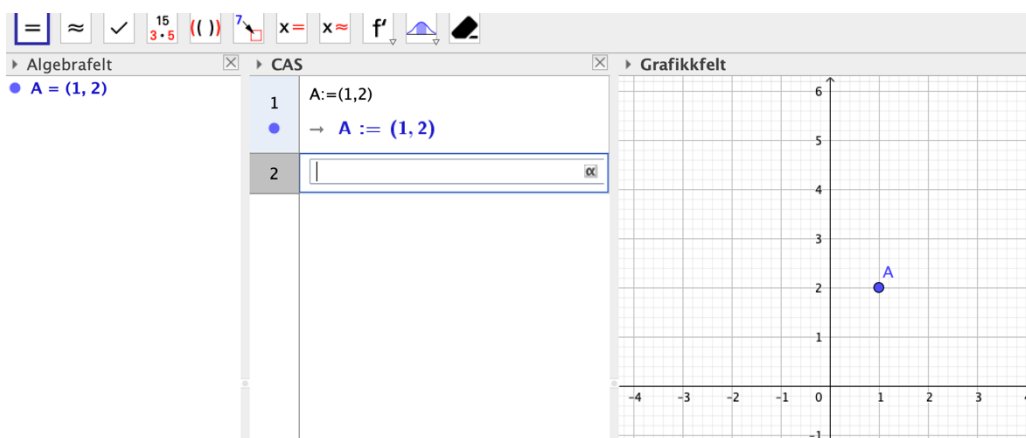
a $f(x) = x - 3$

b $f(x) = 3x + 10$

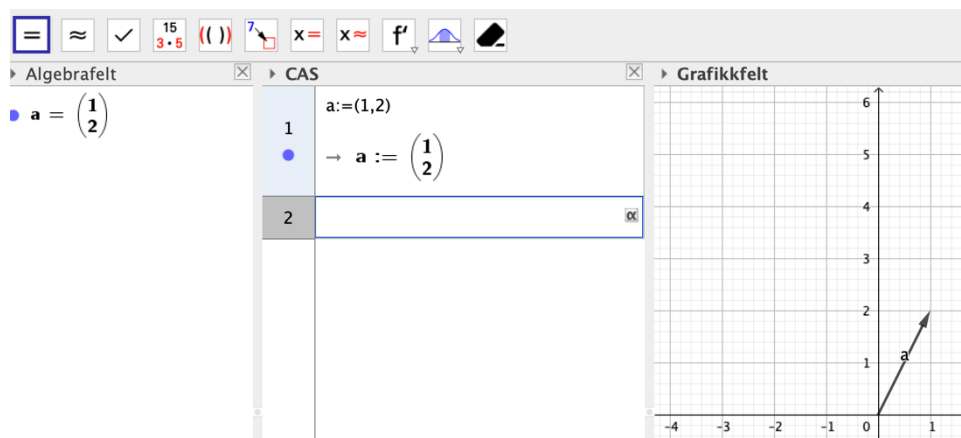
c $f(x) = x^2 - 4$
(2 løsninger)

Definisjon av punkter i CAS

Skriver vi $A := (1, 2)$ så har vi lagret punktet $(1, 2)$ i variabelen A . $A = (1, 2)$ vil da dukke opp i Algebrafeltet og vil dukke opp som et punkt i Grafikkfeltet.



NB: Om du ønsker å definere et punkt i GeoGebra så er det viktig du benytter stor bokstav. Dersom du skriver for eksempel $a := (1, 2)$ så vil du isteden definere en vektor. Gjør du dette vil det se slik ut:



EKSEMPEL 11

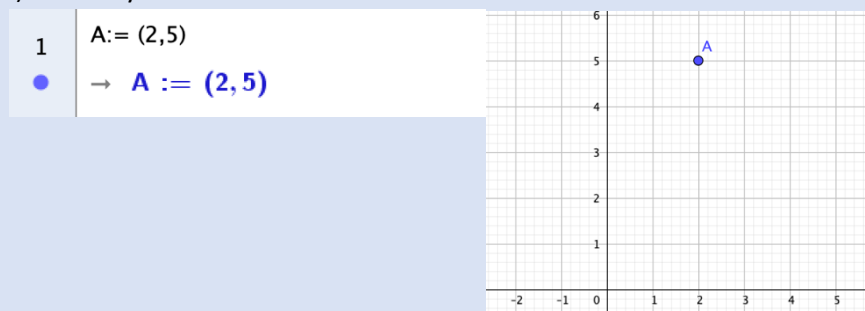


<https://GG5e11.studenthjelp.no/>

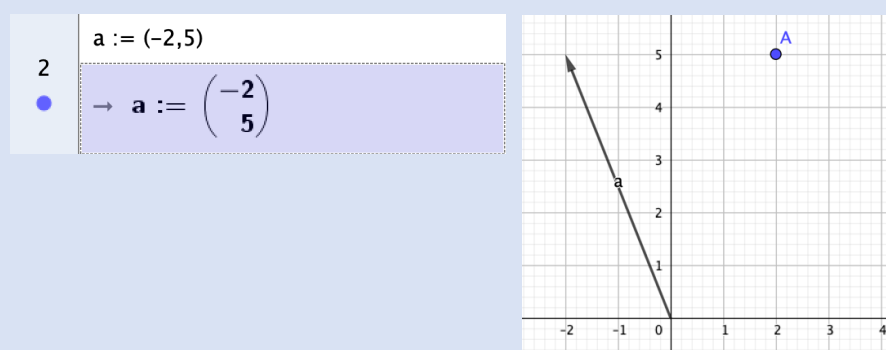
- Definer punktet (2,5) i CAS
- Definer vektoren (-2,5) i CAS

Løsning:

- Vi benytter stor bokstav når vi definerer i CAS:



- Vi benytter liten bokstav når vi definerer i CAS



Oppgave 11

Definer punktene $A = (0, 3)$ og $O = (0, 0)$ og vektoren $a = (0, 3)$



Å definere et punkt på en graf

EKSEMPEL 12

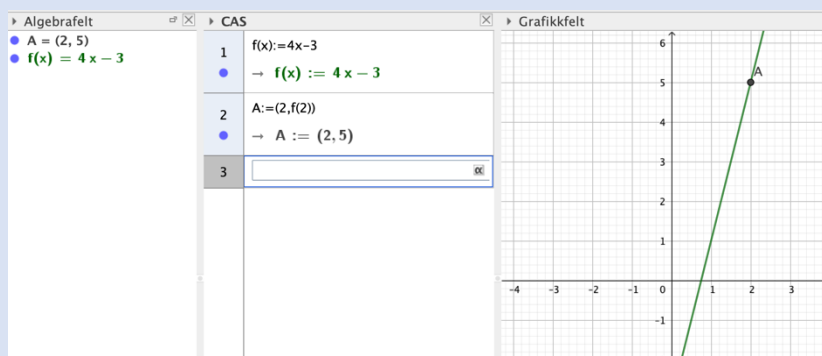


<https://GG5e12.studenthjelp.no/>

- Definer funksjonen $f(x) = 4x - 3$ i CAS og definer deretter punktet $A := (2, f(2))$
- Bruk CAS til å finne og tegne punktet på grafen der $x = 1$.

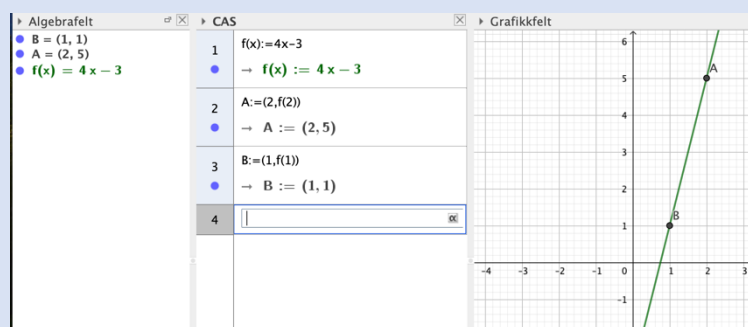
Løsning:

a)



Vi ser at når vi skriver inn punktet $(2, f(2))$ så regner CAS automatisk ut at $f(2) = 5$ ettersom vi allerede har definert $f(x)$ tidligere og vi ender opp med punktet $(2, 5)$.

- Om vi ønsker et punkt på grafen der $x = 1$ skriver vi bare $B := (1, f(1))$



Vi ser vi har fått punktet $B = (1, 1)$ markert på grafen.

Oppgave 12

La $f(x) = x^2 - 4$

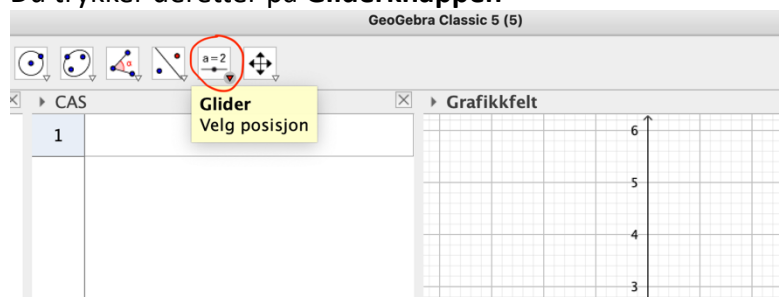
- Definer funksjonen i CAS i GeoGebra slik at funksjonen tegnes opp i Grafikkfeltet.
NB: Husk $:$ og at x^2 skrives $x**2$
- Definer punktet $A = (4, f(4))$ i CAS (NB husk $:$)
- Bruk CAS til å tegne punktet på grafen der $x = -1$



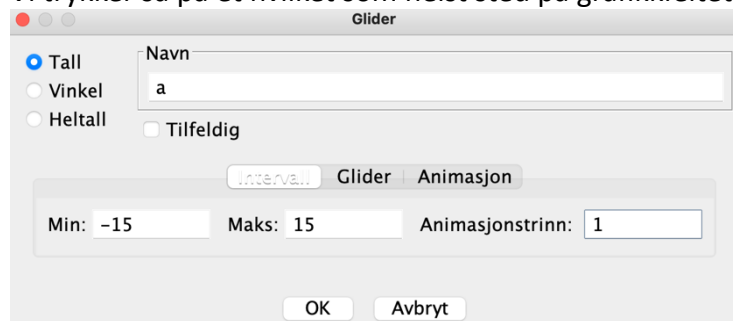
Å definere en glider i GeoGebra

Noen ganger ønsker vi å lage bevegelige punkter eller funksjoner i grafikkfeltet. For å gjøre dette må vi benytte oss av en glider. For å lage en glider trykker vi oss først inn i grafikkfeltet (Dette gjør du ved å trykke på et hvilket som helst punkt på grafikkfeltet.)

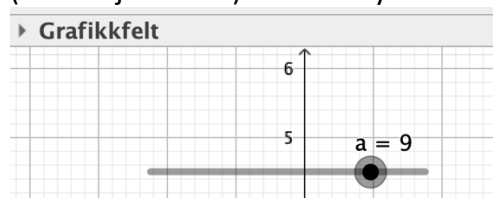
Du trykker deretter på **Gliderknappen**



Vi trykker så på et hvilket som helst sted på grafikkfeltet da kommer det opp en ny meny.



Her har vi satt variabelnavn (Navn) lik a . Satt laveste verdi til variabelen (Min) lik -15 , høyeste verdi til variabelen (Max) lik 15 og skrittlengde når variabelen endres (Animasjonstrinn) lik 1 . Vi trykker deretter ok og får en glider vi nå kan benytte.



Om vi nå skriver inn ett uttrykk med a i CAS, vil a regnes som 9 så lenge glideren står på dette (som over). Eksempelvis:

CAS	
1	$a+3$
☐	$\rightarrow 12$

Om vi drar i glideren og endrer verdien til a så vil verdien til uttrykket automatisk endres også. Setter vi $a = -6$ får vi:

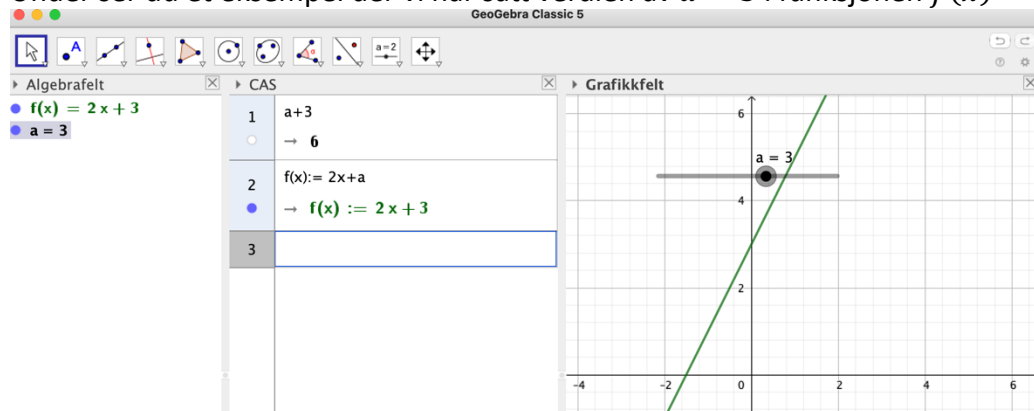
CAS	
1	$a+3$
☐	$\rightarrow -3$

Vi kan også definere punkter og funksjoner i CAS med en glidervariabel som a . Om vi gjør dette kan vi endre glidervariabelen og se punktene og grafene bevege flytende ettersom vi drar i glideren.

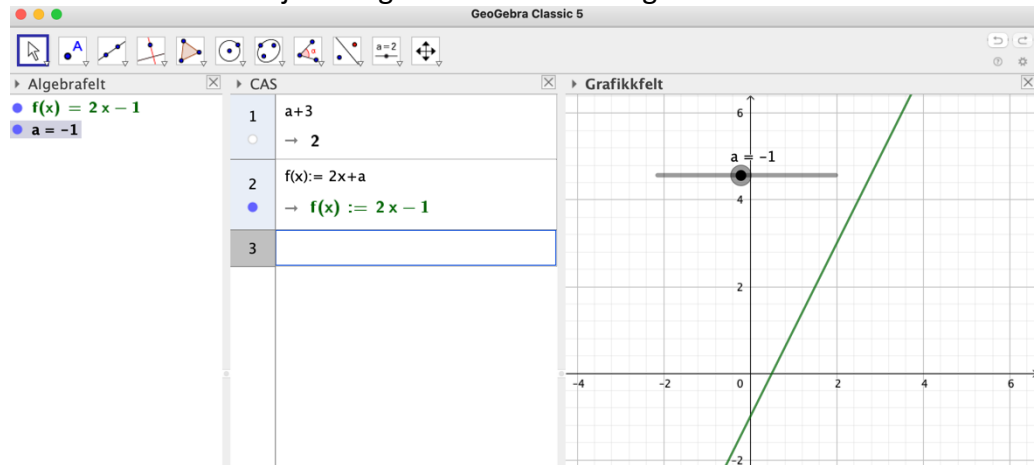


NB: Det er viktig at glideren er det første du definerer. Om du skriver andre ting først i CAS oppdaterer den seg ofte ikke ordentlig som den skal.

Under ser du et eksempel der vi har satt verdien av $a = 3$ i funksjonen $f(x) = 2x + a$



Her ser vi hva som skjer med grafen når vi endrer glider verdien a til -1 .



Bevegelig punkt med glider

EKSEMPEL 13



- Definer en glider k som går ifra -10 til 10 og har skrittlengde 1 .
- Bruk deretter CAS til å definere punktet $A := (k, 1)$ prøv så å variere på verdien til glideren.
- Definer et annet punkt $B := (2, k)$ i CAS. Prøv også nå å variere på verdien av k . Hva observerer du?

<https://GG5e13.studenthjelp.no/>

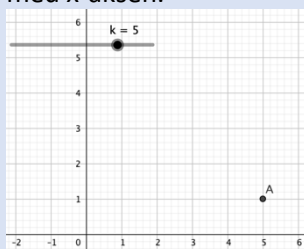
Løsning:

- Vi følger prosedyren over ved å først trykke oss inn i grafikkfeltet og deretter trykke på  (Glider-knappen). Vi stiller inn glider menyen som under:



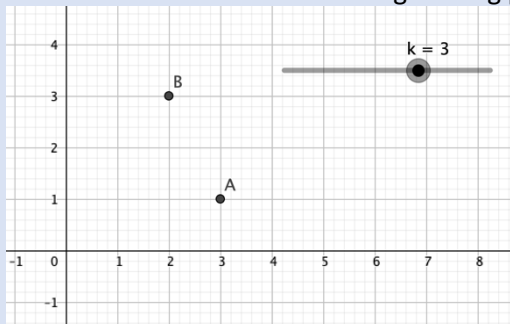
b) Vi skriver inn i CAS

Vi ser at om vi varierer verdien av k så beveger punktet A seg parallelt med x-aksen.



c) Vi skriver inn i CAS:

Vi ser at når vi varierer k så beveger B seg parallelt med y-aksen.



Oppgave 13

Lag en glider a som går ifra -4 til 4 med skrittlengde 0.5 bruk deretter a til å:

- a** Skriv inn $2a + 4$ i CAS og finn verdien til dette. Beveg litt på glideren. Hva er den lavest og den høyeste verdien uttrykket får?
- B** Lage et bevegelig punkt A som beveger seg parallelt med x-aksen og ett punkt B som beveger seg parallelt med y-aksen.



EKSEMPEL 14



<https://GG5e14.studenthjelp.no/>

- Definer en glider a som går ifra -10 til 10 og har skrittlengde 2 .
- Sett nå $f(x) := a * x + 1$ i CAS.
- Varier på verdien av a hva skjer for forskjellige verdier av a ?

Løsning:

- Vi følger prosedyren over ved å først trykke oss inn i grafikkfeltet og deretter trykke på  (Glider-knappen). Vi stiller inn glider menyen som under:

b)

Oppgave 14

Lag en glider a som går ifra -10 til 10 med skrittlengde 0.5 bruk deretter a til å:

- Definer funksjonen $f(x) = ax + 1$. **NB:** Når du skal skrive denne funksjonen i CAS må du sette ett gangetegn $*$ imellom a og x . Varier a og kommenter hva som skjer med $f(x)$ for forskjellige verdier av a
- Definere funksjonen $g(x) = ax^2 + 1$. Varier a og kommenter hva som skjer med $g(x)$ for forskjellige verdier av a



Hvordan løse likninger med grafikkfeltet og i CAS (Skjæring imellom to linjer og grafer)

Skjæring imellom 2 lineære grafer

EKSEMPEL 15



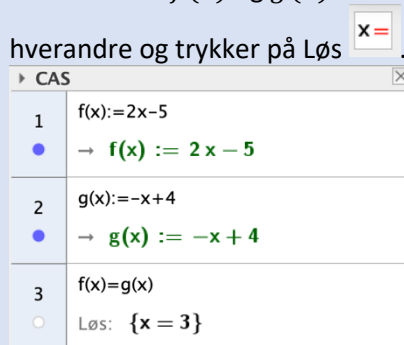
<https://GG5e15.studenthjelp.no/>

La $f(x) = 2x - 5$ og $g(x) = -x + 4$. Finn når $f(x) = g(x)$.

- a) Ved hjelp av CAS
- b) Grafisk

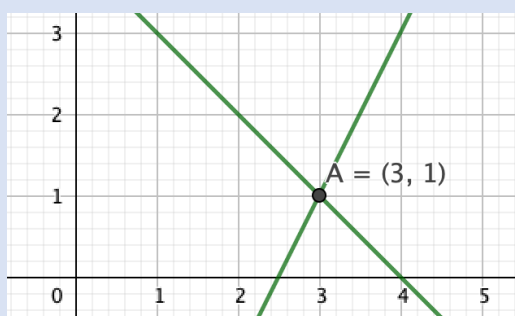
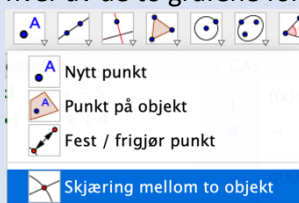
Løsning:

- a) Vi skriver inn $f(x)$ og $g(x)$ inn i CAS. Vi setter deretter funksjonene like



- b)

Ettersom vi allerede har definert $f(x)$ og $g(x)$ i CAS har vi grafene allerede i grafikkfeltet. Alt vi trenger å gjøre er å lese av skjæringspunktet imellom de to. Vi trykker på «skjæring imellom to objekt» og deretter på hver av de to grafene for å markere skjæringspunktet.



Vi ser at de to grafene skjærer hverandre når $x = 3$ og $y = 1$. Svaret blir altså $x = 3$. (Om du ikke klarer å lese av punktet direkte så står det også i Algebrafeltet.)



Oppgave 15

La $f(x) = 3x + 10$ og $g(x) = -2x + 15$. Finn når $f(x) = g(x)$.

a Ved hjelp av CAS

b Grafisk

Skjæring mellom graf og linje (fler skjæringspunkt)

EKSEMPEL 16



<https://GG5e16.studenthjelp.no/>

La $f(x) = x^2 - 5$ og $g(x) = -4x$. Finn når $f(x) = g(x)$.

a) Ved hjelp av CAS

b) Grafisk

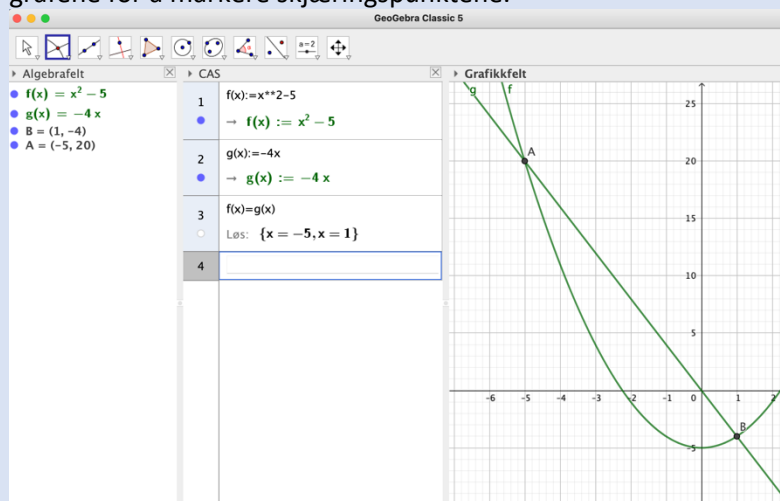
Løsning:

a) Som i forrige eksempel skriver vi inn i CAS, setter funksjonene like

hverandre og trykker Løs

CAS	
1	$f(x) := x^2 - 5$
	→ $f(x) := x^2 - 5$
2	$g(x) := -4x$
	→ $g(x) := -4x$
3	$f(x) = g(x)$
	Løs: $\{x = -5, x = 1\}$

b) Vi trykker på «skjæring mellom to objekt» og deretter på hver av de to grafene for å markere skjæringspunktene.



Vi leser av skjæringspunktene i Algebrafeltet og ser at $x = -5$ og $x = 1$ er x-verdiene der funksjonene er like hverandre.



Oppgave 16

La $f(x) = x^2 + 5x - 10$ og $g(x) = -2x + 20$. Finn når $f(x) = g(x)$.

a Ved hjelp av CAS

b Grafisk

Hvordan løse likningssett med 2 ukjente Grafisk og med CAS (likningssett)

Noen ganger får vi oppgitt et sett med likninger med fler ukjente (istedenfor kun en likning med bare en ukjent). Et eksempel på dette kan være likningssettet:

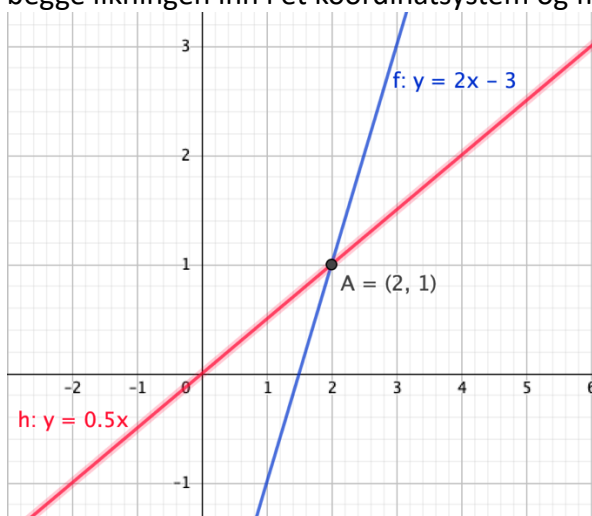
$$\begin{array}{ll} I: & y = 2x - 3 \\ II: & 2y - x = 0 \end{array}$$

(Her viser romertallene *I* og *II* til at vi har likning 1 og likning 2, dette impliserer litt at de hører sammen. Det er ofte sånn at slike likninger blir ført uten disse romertallene også.)

Likningssettet ovenfor løser vi ved å bruke at både *I* og *II* skal stemme samtidig. Dette kan vi gjøre både for hånd (det viser jeg ikke her), grafisk og med CAS.

Når vi skal gjøre det grafisk så tegner vi opp linjene de to likningene lager i et koordinatsystem og finner skjæringspunktet imellom disse. Her i likning *I* har vi en linje på formen $y = ax + b$ og vi har derfor både stigningstall og konstantleddet klart og vi kan (forhåpentligvis) tegne linjen.

Likning *II* må vi omforme først. $2y - x = 0 \rightarrow 2y = x \rightarrow y = \frac{x}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x$. Vi kan nå tegne begge likningen inn i et koordinatsystem og finne skjæringspunktet.



Vi ser at skjæringspunktet er $(1, 2)$. Her er altså $x = 1$ og $y = 2$, dette er også løsningen på likningssettet. Både *I* og *II* stemmer (altså sidene i likningene er like hverandre) når $x = 1$ og $y = 2$.

For å løse likningssettet i CAS må vi:

Skritt 1: skrive inn likningene

CAS	
1	$y = 2x - 3$ ☐ $\rightarrow y = 2x - 3$
2	$2y - x = 0$ ☐ $\rightarrow -x + 2y = 0$

Skritt 2: Markere de lyseblå feltene (ved å trykke inn og dra piltasten over)

CAS	
1	$y = 2x - 3$ ☒ $\rightarrow y = 2x - 3$
2	$2y - x = 0$ ☒ $\rightarrow -x + 2y = 0$

Skritt 3: Trykke Løs  eller Løs Numerisk  da vil du få et resultat som under:

3	$\{ \$1, \$2 \}$ ☐ Løs: $\{ \{ x = 2, y = 1 \} \}$
---	---

Alternativt skritt 3: Du kan du skrive inn $\{ \$1, \$2 \}$ direkte i CAS vindu 3 for så å trykke løs .

NB: $\$1$ refererer til resultatet i CAS-vindu 1 og $\$2$ refererer til svaret i CAS-vindu 2 osv.

EKSEMPEL 17



Løs likningssettet:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 8 \\ x + 4y &= 11 \end{aligned}$$

- a) Grafisk
- b) Ved hjelp av CAS

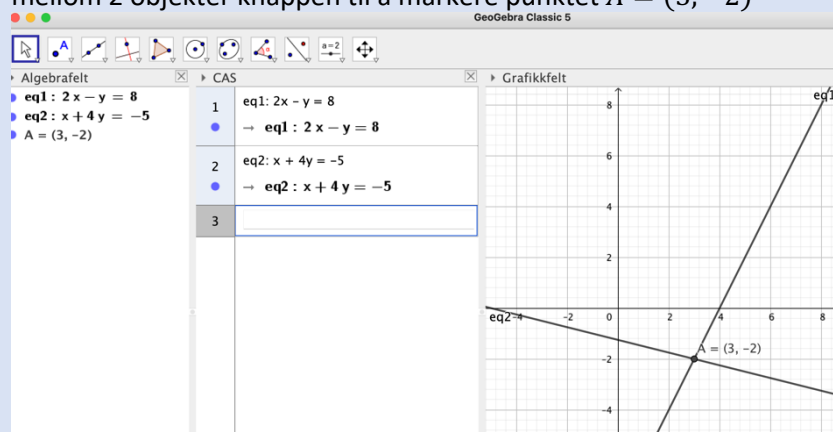
Løsning:

- a) For å tegne opp linjene enkelt skriver vi de først direkte inn i CAS og trykker deretter på knappen på begge som illustrert på bildet.

CAS		CAS	
1	$2x - y = 8$ ☐ $\rightarrow 2x - y = 8$	1	eq1: $2x - y = 8$ ☒ $\rightarrow \text{eq1} : 2x - y = 8$
2	$x + 4y = 11$ ☐ $\rightarrow x + 4y = 11$	2	eq2: $x + 4y = 11$ ☒ $\rightarrow \text{eq2} : x + 4y = 11$

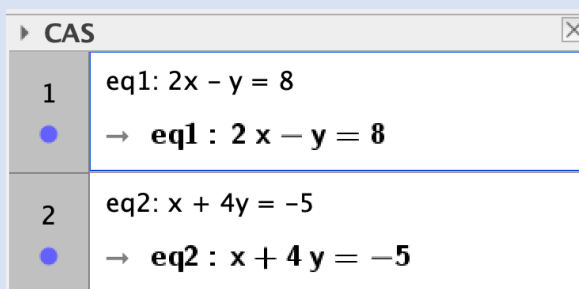


Grafene vil da automatisk tegnes opp i CAS. Vi benytter oss av skjæring mellom 2 objekter knappen til å markere punktet $A = (3, -2)$

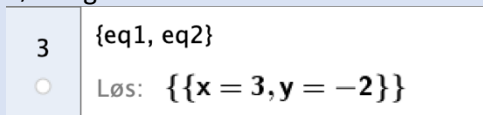


Vi kan på bakgrunn av dette konkludere med at likningssettet har løsningen $x = 3$ og $y = -2$

b) Vi markerer de to likningene og trykker



Løsningen blir da:



Oppgave 17

Løs likningssettene under først grafisk og deretter ved hjelp av CAS.

a $2x - 3y = 15$
 $x + 2y = 3$

b $x - 12y = 33$
 $x - 2y = 3$

c $2x - 2y = x - 1$
 $3x + 6y = 11 - 2y$



Likningssett med flere ukjente

Det går også an å løse likninger med fler ukjente på denne måten, men da er det ikke like enkelt å tegne opp linjene grafisk.

EKSEMPEL 18



<https://GG5e18.studenthjelp.no/>

$$\begin{aligned}2x - 2y + 3z &= 2 \\ x + 4y - 2z &= 9 \\ -3x + z &= -1\end{aligned}$$

Løsning:

Skriv inn likningene i CAS og marker dem som i bildet til høyre.

1	$2x - 2y + 3z = 2$
☐	$\rightarrow 2x - 2y + 3z = 2$
2	$x + 4y - 2z = 9$
☐	$\rightarrow x + 4y - 2z = 9$
3	$-3x + z = -1$
☐	$\rightarrow -3x + z = -1$

CAS	
1	$2x - 2y + 3z = 2$
☒	$\rightarrow 2x - 2y + 3z = 2$
2	$x + 4y - 2z = 9$
☒	$\rightarrow x + 4y - 2z = 9$
3	$-3x + z = -1$
☒	$\rightarrow -3x + z = -1$

Trykk deretter



4	$\{\$1, \$2, \$3\}$
☐	Løs: $\{\{x = 1, y = 3, z = 2\}\}$

Oppgave 18

Løs likningssettene under først grafisk og deretter ved hjelp av CAS.

a

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 2 \\ 2x - y + z &= -3 \\ 3x - 2y + 2z &= -7\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}2x - y + z &= 7 \\ x - 2y + 3z &= -2 \\ -x + 3y - z &= 2\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}x - 2y + z &= 5 \\ 3x + 6y &= -18 \\ x - y + 3z &= 9\end{aligned}$$



GeoGebra 1T

Hvordan definere en funksjon med begrensninger (NB:Advarsel)

Noen ganger ønsker vi å kun tegne en funksjon for x -verdier i ett visst område. Om du for eksempel skal beregne inntekten din når du selger is til 30 kroner stykk. Inntektsfunksjonen ville da normalt sett vært $I(x) = 30x$ der x er antall is.

Når vi kun har 100 is å selge så blir det umulig å oppnå et salg på fler enn 100 is. Det er heller ikke mulig å selge et negativt antall is. Vi får altså et definisjonsområde for inntektsfunksjonen $0 \leq x \leq 100$. Funksjonen skrevet matematisk ville sett slik ut:

$$I(x) = 30x, D_I = [0,100] \text{ eller } I(x) = 30x, 0 \leq x \leq 100.$$

Dette kan vi skrive inn på fler forskjellige måter:

Vi kan benytte: $\text{Funksjon}(\text{Funksjon}, \text{Start}, \text{Slutt})$, skulle vi benyttet oss av denne løsningen i dette tilfellet ville vi i CAS skrevet:

$$I(x) := \text{Funksjon}(30x, 0, 100)$$

En annen måte er å skrive det naturlig:

$$I(x) := 30x, 0 \leq x \leq 100$$

MAC: Opt + < $\rightarrow$ $\leq$

MAC: Opt + > $\rightarrow$ $\leq$

Vi har også en tredje måte som blir viktig senere

EKSEMPEL 19

Tegn grafen til $I(x) = 30x$ der $D_I = [0,100]$ ved hjelp av CAS.

Løsning:

Vi kan skrive funksjonen på alle 3 måtene beskrevet ovenfor og alle vil gi grafen

CAS	
1	$f(x) := \text{Funksjon}(30x, 0, 100)$ $\rightarrow f(x) := \text{Dersom}(0 \leq x \leq 100, 30x)$
2	$g(x) := 30x, 0 \leq x \leq 100$ $\rightarrow g(x) := \text{Dersom}(0 \leq x \leq 100, 30x)$
3	$h(x) := \text{Dersom}(0 \leq x \leq 100, 30x)$ $\rightarrow h(x) := \text{Dersom}(0 \leq x \leq 100, 30x)$



Hvordan faktorisere uttrykk i CAS

EKSEMPEL 19

Løsning:

Enkel funksjonsdrøfting med CAS og Grafikkfeltet

Hvordan finne nullpunkt, toppunkt og bunnpunkt til en funksjon med grafikkfeltet og CAS

Hvordan definere en funksjon med delt forskrift

Når du skal definere en funksjon med delt forskrift må du benytte deg av funksjonen:

Dersom(Vilkår, Så, Ellers)

Denne kan virke

EKSEMPEL 19

Løsning:

Om du skal definere

Dersom(Vilkår, Så, Vilkår, Så, Ellers)

Dersom(Vilkår, Så, Vilkår, Så, Ellers)



Gjennomgang GeoGebra 5 for VGS

Det samme som for ungdomsskole

- Regneark
- Regresjonsanalyse
- Sannsynlighetskalkulator
-

