

Matematikk S2 Formelark

Alle formler du trenger til eksamen — LK20

Integrasjon

Grunnleggende integrasjonsregler

- **Potensregel:** $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
- **Eksponentiell:** $\int e^x dx = e^x + C$
- **Eks. med koef.:** $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$
- **Logaritme:** $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$
- **Sinus:** $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- **Cosinus:** $\int \cos x dx = \sin x + C$

Integrasjonsteknikker

- **Konstant faktor:** $\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$
- **Sum:** $\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx$
- **Kjerneregul:** $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$
- **Delvis integrasjon:** $\int u dv = uv - \int v du$

Bestemt integral

- **Definisjon:** $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
- **Areal under kurve:** $A = \int_a^b |f(x)| dx$
- **Areal mellom kurver:** $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$
- **Gjennomsnitt:** $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Differensialligninger

Separable ligninger

- **Form:** $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$
- **Metode:** $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$

Lineære 1. ordens

- **Form:** $y' + P(x)y = Q(x)$
- **Integrasjonsfaktor:** $\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$

Vekstmodeller

- **Eksponentiell vekst:** $y' = ky \Rightarrow y = Ce^{kt}$
- **Begrenset vekst:** $y' = k(M - y)$
- **Begrenset løsning:** $y = M - Ce^{-kt}$
- **Logistisk vekst:** $y' = ky \left(1 - \frac{y}{M}\right)$
- **Logistisk løsning:** $y = \frac{M}{1 + Ce^{-kt}}$

Vendepunkt i logistisk modell

- Vendepunkt når $y = \frac{M}{2}$
- Maksimal vekstrate ved vendepunktet
- M er bæreevnen (maksimal populasjon)

Statistikk

Deskriptiv statistikk

- **Gjennomsnitt:** $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$
- **Varsians (utvalg):** $s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$
- **Standardavvik:** $s = \sqrt{s^2}$
- **Standardfeil:** $SE = \frac{s}{\sqrt{n}}$

Konfidensintervall for andel

- **Punktestimat:** $\hat{p} = \frac{x}{n}$
- **Standardfeil:** $SE = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
- **95% KI:** $\hat{p} \pm 1,96 \cdot SE$
- Forutsetning: $n\hat{p} \geq 10$ og $n(1-\hat{p}) \geq 10$

Konfidensintervall for gjennomsnitt

- **Standardfeil:** $SE = \frac{s}{\sqrt{n}}$
- **95% KI:** $\bar{x} \pm t^* \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$
- Bruk t-fordeling med $df = n - 1$

Hypotesetesting

- H_0 : Nullhypotese (ingen effekt)
- H_1 : Alternativ hypotese
- Signifikansnivå α (ofte 0,05)
- p-verdi $< \alpha \Rightarrow$ forkast H_0

Testobservatorer

- **z-test (andel):** $z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$
- **t-test (gj.snitt):** $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
- Tosidig 95%: forkast hvis $|z| > 1,96$

Feiltyper

- Type I-feil: Forkaster sann H_0 (sannsynlighet α)
- Type II-feil: Beholder usann H_0 (sannsynlighet β)
- Teststyrke: $1 - \beta$

Sannsynlighetsfordelinger

Diskrete fordelinger

- **Forventning:** $E(X) = \mu = \sum x_i \cdot P(X = x_i)$
- **Varsians:** $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
- **Standardavvik:** $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

Binomisk fordeling

- $X \sim \text{Bin}(n, p)$
- **Punktsannsynlighet:** $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- **Forventning:** $E(X) = np$
- **Varsians:** $Var(X) = np(1-p)$
- **Standardavvik:** $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Normalfordeling

- $X \sim N(\mu, \sigma)$
- **Standardisering:** $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$
- $P(X < x) = P\left(Z < \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$
- 68-95-99,7-regelen for $\mu \pm \sigma, 2\sigma, 3\sigma$

Normalapproksimasjon av binomisk

- Gyldig når $np \geq 10$ og $n(1-p) \geq 10$
- $X \sim \text{Bin}(n, p) \approx N(np, \sqrt{np(1-p)})$

t-fordeling

- Brukes når populasjonens σ er ukjent
- Mer spredt enn normalfordelingen
- $df = n - 1$ frihetsgrader
- Nærmer seg $N(0, 1)$ når n øker

Kritiske z-verdier

- $z_{0,05} = 1,645$ (90% KI / ensidig 95%)
- $z_{0,025} = 1,96$ (95% KI tosidig)
- $z_{0,005} = 2,576$ (99% KI tosidig)

Regresjonsanalyse

Lineær regresjon

- **Modell:** $\hat{y} = ax + b$
- **Stigningstall:** $a = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$
- **Konstantledd:** $b = \bar{y} - a\bar{x}$
- Regresjonslinja går gjennom $(\bar{x}, \bar{y})$

Korrelasjon

- **Korrelasjonskoeff.:** $r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2}}$
- $-1 \leq r \leq 1$
- $|r|$ nær 1: sterk lineær sammenheng
- r nær 0: svak lineær sammenheng

Forklaringsgrad

- R^2 : $R^2 = r^2$
- Andel av variasjon forklart av modellen
- $0 \leq R^2 \leq 1$

Residualer

- **Residual:** $e_i = y_i - \hat{y}_i$
- Residualplott: sjekk for mønster
- Bra modell: tilfeldig spredte residualer

Andre regresjonsmodeller

- **Polynom:** $\hat{y} = ax^2 + bx + c$
- **Eksponentiell:** $\hat{y} = a \cdot b^x$ eller $\hat{y} = ae^{kx}$
- **Potens:** $\hat{y} = ax^b$
- **Logaritmisk:** $\hat{y} = a + b \ln x$

Matematikk i økonomi

Kostnadsfunksjoner

- **Totalkostnad:** $K(x) = FK + VK(x)$
- **Enhetskostnad:** $E(x) = \frac{K(x)}{x}$
- **Grensekostnad:** $K'(x)$
- **Min. enhetskostnad:** $E'(x) = 0$

Inntekt og fortjeneste

- **Inntekt:** $I(x) = p(x) \cdot x$
- **Grenseinntekt:** $I'(x)$
- **Fortjeneste:** $F(x) = I(x) - K(x)$
- **Maks fortjeneste:** $F'(x) = 0$
- Ekvivalent: $I'(x) = K'(x)$

Etterspørsel og elastisitet

- **Etterspørselsfunksjon:** $x = D(p)$
- **Priselastisitet:** $E_p = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$
- $|E_p| > 1$: elastisk etterspørsel
- $|E_p| < 1$: uelastisk etterspørsel
- $|E_p| = 1$: enhetselastisk

Konsument- og produsentoverskudd

- **Konsumentoverskudd (KO):** $\int_0^{x^*} [D(x) - p^*] dx$
- **Produsentoverskudd (PO):** $\int_0^{x^*} [p^* - S(x)] dx$
- x^* og p^* er likevektsverdier

Modellering

Modelltyper

- **Lineær:** $f(x) = ax + b$, konstant endring
- **Eksponentiell:** $f(x) = a \cdot b^x$, prosentvis vekst
- **Potens:** $f(x) = ax^b$, skalering
- **Logistisk:** $f(x) = \frac{M}{1 + Ce^{-kx}}$, begrenset vekst

Veksthastighet

- **Absolutt veksthast.:** $f'(x)$
- **Relativ veksthast.:** $\frac{f'(x)}{f(x)}$
- Eksponentiell: konstant relativ veksthastighet
- Logistisk: avtagende relativ veksthastighet

Modelltilpasning

- Bruk regresjon til å bestemme parametre
- Vurder R^2 og residualplott
- Sjekk om modellen gir mening i konteksten
- Vurder ekstrapolering med forsiktighet

Kombinatorikk

Telleformler

- **Fakultet:** $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$
- **Permutasjoner:** $P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$
- **Kombinasjoner:** $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n - r)!}$

Regneregler

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n - r}$
- $\binom{n}{r} = \binom{n - 1}{r - 1} + \binom{n - 1}{r}$

Derivasjon (repetisjon)

Derivasjonsregler

- $(x^n)' = nx^{n - 1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(e^{kx})' = ke^{kx}$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$

Produktregel og kvotregel

- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Kjerneregler

- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Viktige tabeller

t-fordeling (tosidig KI)

df	90%	95%	99%
5	2,015	2,571	4,032
10	1,812	2,228	3,169
15	1,753	2,131	2,947
20	1,725	2,086	2,845
25	1,708	2,060	2,787
30	1,697	2,042	2,750
40	1,684	2,021	2,704
60	1,671	2,000	2,660
∞	1,645	1,960	2,576

Binomialkoeffisienter (Pascals trekant)

n	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Logaritmeregler

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $e^{\ln x} = x$
- $\ln(e^x) = x$

Tips til eksamen

Integrasjon

- Sjekk svaret ved å derivere
- Husk konstanten $+C$ ved ubestemt integral
- Tegn figur ved arealberegning

Statistikk

- Les hypoteseformuleringen nøye
- Bruk riktig fordeling (z eller t)
- Konkluder alltid i kontekst

Modellering

- Identifiser type vekst fra problemet
- Sjekk om modellen er rimelig
- Vær forsiktig med ekstrapolering

Generelt

- Vis all mellomregning
- Skriv tydelig hva du regner ut
- Svar på det som blir spurt