

Matematikk R2 Formelark

Alle formler du trenger til eksamen — LK20

Integrasjon

Grunnleggende integraler

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

Substitusjon

- $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$
- Sett $u = g(x)$, da er $du = g'(x) dx$
- $\int f(u) du = F(u) + C$

Delvis integrasjon

- $\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$
- Velg u som blir enklere ved derivasjon
- LIATE: Logaritme, Invers trig, Algebraisk, Trig, Eksponentiell

Bestemt integral

- $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
- **Areal:** $A = \int_a^b |f(x)| dx$
- **Mellom kurver:** $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

Differensialligninger

Separable ligninger

- Form: $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$
- Metode: $\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$
- Integrer begge sider

Lineære 1. ordens

- Form: $y' + P(x)y = Q(x)$
- **Integrerende faktor:** $\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$
- $y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)Q(x) dx$

Eksponentiell vekst/henfall

- $\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow y = y_0 e^{kt}$
- $k > 0$: vekst, $k < 0$: henfall
- **Halveringstid:** $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{|k|}$
- **Doblingstid:** $T_d = \frac{\ln 2}{k}$

Logistisk vekst

- $\frac{dN}{dt} = kN \left(1 - \frac{N}{M}\right)$
- M = bæreevne (maks populasjon)
- $N(t) = \frac{M}{1 + C e^{-kt}}$

Rekker og følger

Aritmetisk følge

- $a_n = a_1 + (n-1)d$
- d = differanse
- **Sum:** $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$

Geometrisk følge

- $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$
- k = kvotient
- **Endelig sum:** $S_n = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}, \quad k \neq 1$
- **Uendelig sum:** $S = \frac{a_1}{1-k}, \quad |k| < 1$

Konvergenskriterier

- **Forholdstesten:** $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$
 - $L < 1$: konvergerer
 - $L > 1$: divergerer
 - $L = 1$: inkonklusiv
- **Rottesten:** $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Viktige rekker

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konv. for $p > 1$

Taylor-rekker

Taylor-polynom

- $f(x) \approx \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$
- Maclaurin: Taylor rundt $a = 0$

Maclaurin-rekker

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$
- $(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$ (binomisk)

Restledd

- **Lagranges restledd:** $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$
- c ligger mellom a og x

Vektorer i rommet

Vektoroperasjoner

- $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$
- **Lengde:** $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- **Skalarprodukt:** $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

Kryssprodukt

- $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$
- $= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$
- $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ og $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

Linje i rommet

- **Parametrisk:** $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$
- $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$, der $\vec{v}$ er retningsvektor

Plan i rommet

- **Normalform:** $ax + by + cz + d = 0$
- $\vec{n} = (a, b, c)$ er normalvektor
- **Avstand punkt-plan:** $d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Vinkel mellom plan/linjer

- **Vinkel mellom vektorer:** $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$
- Parallell plan: $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$
- Vinkelrette plan: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

Komplekse tall

Grunnleggende

- $z = a + bi$, der $i^2 = -1$
- $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$
- **Konjugert:** $\bar{z} = a - bi$
- **Modulus:** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Polar form

- $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$
- $r = |z|$, $\theta = \arg(z)$
- $\tan \theta = \frac{b}{a}$

Regning i polar form

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

de Moivres formel

- $z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$
- $z^n = r^n e^{in\theta}$

n-te røtter

- $w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\theta + 2\pi k}{n}}$
- $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$
- Gir n forskjellige røtter

Eulers formel

- $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
- $e^{i\pi} + 1 = 0$ (Eulers identitet)

Parametrisering og kurver

Parametriske kurver

- $x = x(t)$, $y = y(t)$
- **Stigningstall:** $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$
- **Andre deriverte:** $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{x'(t)}$

Buelengde

- **Kartesisk:** $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$
- **Parametrisk:** $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$

Polare koordinater

- $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- **Areal:** $A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^2 d\theta$

Vanlige parametriseringer

- Sirkel: $x = r \cos t$, $y = r \sin t$
- Ellipse: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$
- Linje: $(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b)$

Bevis og induksjon

Matematisk induksjon

- **Steg 1:** Vis at påstanden gjelder for $n = 1$ (basistilfelle)
- **Steg 2:** Anta at påstanden gjelder for $n = k$ (induksjonshypotese)
- **Steg 3:** Vis at påstanden da gjelder for $n = k + 1$ (induksjonssteg)
- **Konklusjon:** Påstanden gjelder for alle $n \in \mathbb{N}$

Andre bevismetoder

- **Direkte bevis:** Vis $P \Rightarrow Q$ direkte
- **Kontraposisjon:** Vis $\neg Q \Rightarrow \neg P$
- **Moteksempel:** Finn ett tilfelle der påstanden ikke gjelder
- **Selv Motsigelse:** Anta $\neg P$, utled kontradiksjon

Klassiske induksjonsbevis

- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Derivasjon (repetisjon)

Grunnleggende deriverte

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Derivasjonsregler

- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Oppsummering nøkkelformler

Integrasjon

- $\int u dv = uv - \int v du$ (delvis)
- $\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$ (subst.)

Differensialligninger

- $y' = ky \Rightarrow y = Ce^{kx}$
- $y' + Py = Q \Rightarrow \mu = e^{\int P dx}$

Rekker

- Geom. uendelig: $S = \frac{a_1}{1-k}$, $|k| < 1$
- $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$

Vektorer

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta$

Komplekse tall

- $z^n = r^n e^{in\theta}$ (de Moivre)
- $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (Euler)

Tips til eksamen

- Ved integrasjon: prøv substitusjon først
- Ved diffiligninger: identifiser type (separabel/lineær)
- Ved rekker: sjekk konvergens før summering
- Ved vektorer: tegn figur, bruk riktig produkt
- Ved induksjon: skriv alle steg tydelig
- Ved komplekse tall: polar form for potenser/røtter