

Løsningsforslag S2 eksamen V2025

Ståle Gjelsten

14. mai 2025

Jeg blir veldig glad om du melder ifra om feil enten direkte til meg eller via forumet på matematikk.net.

Oppgave 1-1

1-1a

$$\int_0^1 (2e^x + 2x^2) dx = \left[2e^x + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \left(2e^1 + \frac{2}{3}1^3 \right) - \left(2e^0 + \frac{2}{3}0^3 \right) = 2e + \frac{2}{3} - 2 = \underline{\underline{2e - \frac{4}{3}}}$$

1-1b Vi ser at den deriverte av uttrykket i nevneren er det samme som telleren, og det er derfor lurt å forsøke variabelskiftet $u = x^2 - x - 6$.

$$u = x^2 - x - 6 \implies \frac{du}{dx} = 2x - 1 \iff \frac{du}{2x - 1} = dx$$

Vi substituerer inn i det opprinnelige uttrykket

$$\int \frac{2x - 1}{x^2 - x - 6} dx = \int \frac{\cancel{2x - 1}}{u} \frac{du}{\cancel{2x - 1}} = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C = \underline{\underline{\ln |x^2 - x - 6| + C}}$$

Løsning med delbrøkopp spalting

Hvis du velger å løse ved hjelp av delbrøkopp spalting så vil du etter faktorisering få følgende likning

$$2x - 1 = A(x + 2) + B(x - 3)$$

Etter integrasjon får du svaret $\ln |x + 2| + \ln |x - 3| + C$, som er det samme svaret som vi får med variabelskiftet skrevet på en annen form.

Oppgave 1-2

Vi vet at $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ vil ha uendelig mange antideriverte med ulike konstantledd

$$\int -\frac{2}{x^3} dx = \int -2x^{-3} dx = \frac{-2}{-2} x^{-2} + C = \frac{1}{x^2} + C$$

Her er C et hvilket som helst tall. Siden vi har fått vite at arealet av området som avgrenses av grafen til f , $x = 1$, $x = 2$ og x -aksen er lik $\frac{11}{14}$, samt at hele arealet ligger over x -aksen, kan vi bruke et bestemt integral for å finne verdien av C .

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + C \right) dx &= \frac{11}{14} \\ \int_1^2 (x^{-2} + C) dx &= \frac{11}{14} \\ \left[-\frac{1}{x} + Cx \right]_1^2 &= \frac{11}{14} \\ \left(-\frac{1}{2} + C \cdot 2 \right) - \left(-\frac{1}{1} + C \cdot 1 \right) &= \frac{11}{14} \\ -\frac{1}{2} + 2C + \frac{1}{1} - C &= \frac{11}{14} \\ C &= \frac{11}{14} - \frac{1}{2} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Vår antideriverte til $f'(x)$ har altså $C = \frac{2}{7}$, derfor har vi for alle $x \neq 0$:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{7}}}$$

Oppgave 1-3

1-3a

k	1	2	3	6	Sum
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	1
$k \cdot P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{18}{6}$	$\frac{24}{6} = 4$
$(k - \mu)^2 \cdot P(X = k)$	$3^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{9}{6}$	$2^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$	$1^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$	$2^2 \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{6}$	$\frac{26}{6} = \frac{13}{3}$

Vi finner forventningsverdien ved å finne summen av rad 3 siden $E(X) = \sum k \cdot P(X = k)$

$$E(X) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{18}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

Forventningsverdien $E(X) = \underline{\underline{4}}$

1-3b Vi finner variansen ved å summere rad 4 i tabellen siden $\text{Var}(X) = \sum (k - \mu)^2 \cdot P(X = k)$

$$\text{Var}(X) = \frac{9}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} + \frac{12}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$

Variansen er $\text{Var}(X) = \underline{\underline{\frac{13}{3}}}$

Oppgave 1-4

1-4a Her setter vi opp en oversikt for å se hvordan variablene i programmet utvikler seg.

i	a	Beregning av neste a
1	2	$2 + 1 + 2 = \underline{5}$
2	5	$5 + 2 + 2 = \underline{9}$
3	9	$9 + 3 + 2 = \underline{14}$
4	14	$14 + 4 + 2 = \underline{20}$
5	20	

Vi ser en tallfølge hvor differansene mellom leddene starter på 3, og deretter øker med 1 for hvert ledd. Matematisk kan dette uttrykkes med den rekursive sammenhengen

$$a_{n+1} = a_n + n + 2$$

Koden skriver ut leddene i tallfølgen 2,5,9,14,20.

1-4b Eleven har lagt til en variabel S. S gir en løpende sum av verdiene til a, derfor vil S være delsummen til rekka etter n ledd.

Eleven ønsker å finne delsummen til rekka etter 5 ledd, altså $2 + 5 + 9 + 14 + 20 = \underline{\underline{50}}$

Oppgave 1-5

1-5a Enhetskostnaden når det produseres 180 enheter er gitt ved

$$E(180) = \frac{K(180)}{180} = \frac{14920}{180} = 82,89$$

 Du trenger ikke regne ut delestykket over

Du trenger ikke regne ut $\frac{14920}{180}$ siden du har fått oppgitt en linje fra origo til punktet (180, 14920). Stigningstallet til en rett linje er jo $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, og i vårt tilfelle vil $K(180) = \Delta y$ og $180 = \Delta x$. Denne linja har stigningstallet 82,89, derfor må $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{14920}{180} = 82,89$

Grensekostnaden er den deriverte av kostnadsfunksjonen, og grensekostnaden ved 180 enheter er derfor lik stigningstallet til tangenten til K ved $x = 180$. Jeg leser av stigningstallet til tangenten og finner at grensekostnaden er 138.

Enhetskostnaden ved 180 enheter er 82,89 kr/enhet og grensekostnaden er 138 kr/enhet.

1-5b For at vi skal ha størst overskudd må $I'(x) = K'(x)$. Vi bestemmer grenseinntekten.

$$I(x) = p \cdot x \implies I'(x) = p$$

For å finne prisen som gir størst overskudd ved produksjon og salg av 180 enheter så setter vi opp $I'(180) = K'(180)$.

$$I'(180) = K'(180) \iff p = 138$$

Prisen 138 kr gir oss størst overskudd ved produksjon og salg av 180 enheter.

Oppgave 1-6

1-6a Vi ønsker å teste om den nye bensinen gir bedre drivstofføkonomi enn den gamle. La μ være forventningsverdien for kjørelengde per L for den nye bensinen. Da er hypotesene våre:

$$H_0: \mu = 20$$

$$H_A: \mu > 20$$

1-6b Denne hypotesetesten er av et gjennomsnitt. La $\bar{X}$ være gjennomsnittsverdien for drivstofføkonomien for et utvalg av biler. Etter sentralgrensesetningen er $\bar{X}$ normalfordelt med:

$$E(\bar{X}) = \mu = 20$$
$$SD(\bar{X}) = \frac{SD(X)}{\sqrt{n}} = \frac{2,5}{\sqrt{25}} = \frac{2,5}{5} = \frac{1}{2}$$

Observasjonen vår er $\bar{X} = 21$. Vi gjør om til standard normalfordeling:

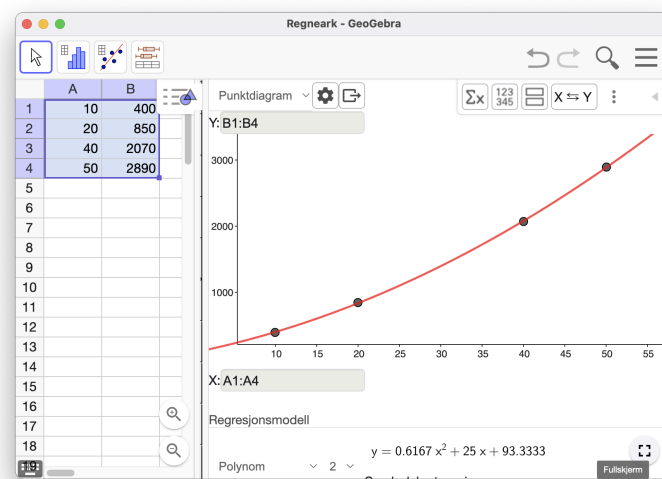
$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{SD(\bar{X})} = \frac{21 - 20}{0,5} = 2$$

Sannsynligheten for at $\bar{X}$ skal ligge mer enn 2 standardavvik over forventningsverdien er kan vi finne ved hjelp av den vedlagte normalfordelingstabellen.

$$P(Z > 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

p -verdien er 0,0228, som er mindre enn signifikansnivået vårt. Vi kan dermed forkaste nullhypotesen om at den nye bensinen er like god som den gamle.

Oppgave 2-1

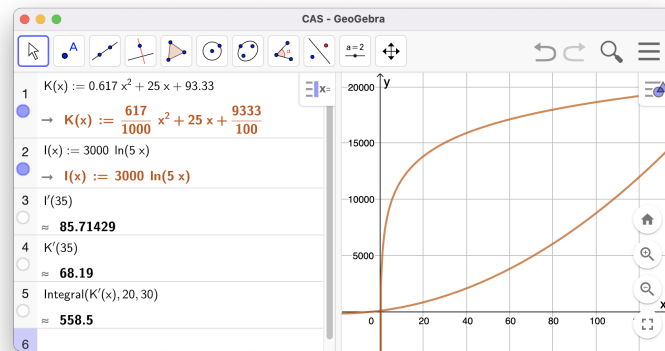


Figur 1: Regresjon i GeoGebra

2-1a Vi finner en andregradsmodell for kostnadene ved hjelp av regresjon i GeoGebra. Se utklippet over.

$$K(x) = 0,617x^2 + 25x + 93,33$$

Grenseinntekten $K'(x) = 2 \cdot 0,617x + 25 = \underline{\underline{1,23x + 25}}$.



Figur 2: Grenseinntekt og grensekostnad i GeoGebra

2-1b Se linje 3 og 4 i CAS.

$$\underline{\underline{I'(35) = 85,71 \text{ og } K'(35) = 68,19}}$$

Her øker grenseinntekten mer enn grensekostnaden, altså vil vi tjene mer penger (85,71 kr) på å produsere en mer enhet, enn hva vi må betale i produksjonskostnader for å produsere en mer enhet (68,19 kr). Vi tjener altså omtrent $85,71 - 68,19 = 17,5$ kr på å produsere og selge 36 enheter framfor 35 enheter.

2-1c Se linje 5 i CAS.

$$\underline{\underline{\int_{20}^{30} K'(x) dx = 558,5}}$$

Dette er det bestemte integralet av *grensekostnaden* $K'(x)$, altså vil svaret vårt tilsvare

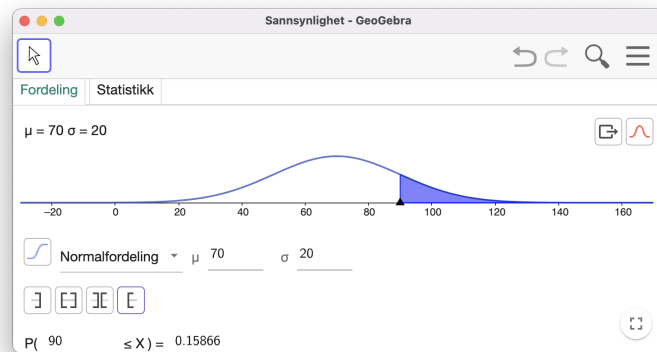
$$\int_{20}^{30} K'(x) dx = K(30) - K(20)$$

558,5 kr er altså differansen i produksjonskostnader mellom å produsere 20 enheter og 30 enheter.

Oppgave 2-2

La B , M og E være lengdene av hoppene til henholdsvis Birger, Maren og Espen.

Vi bestemmer sannsynligheten for at hver av dem hopper 90 meter eller lengre ved hjelp av sannsynlighetsvinduet i GeoGebra, se skjermbildet under. (Kun Birgers utklipp er vist).

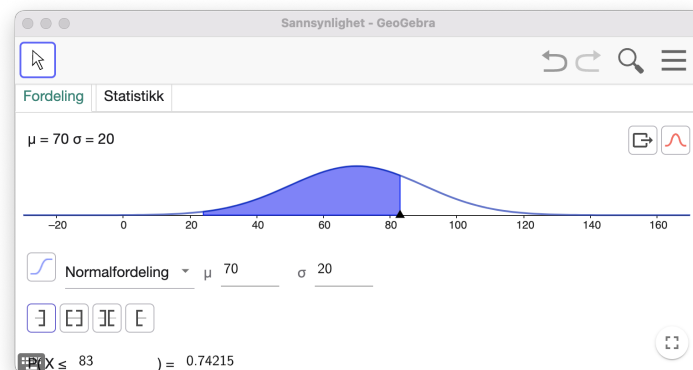


Figur 3: Sannsynligheten for at Birger hopper 90 meter eller lengre

$$P(B > 90) = 0,1587, \quad P(M > 90) = 0,0228, \quad P(E > 90) = 0,0668$$

Sannsynlighetene for at Birger, Maren og Espen hopper lengre enn 90 meter er i ett tilfeldig hopp er henholdsvis 0,1587, 0,0228 og 0,0668.

2-2b Hvis Maren skal hoppe lengst med et hopp på 83 meter så må både $B < 83$ og $E < 83$. Vi kan bruke multiplikasjonsprinsippet for å finne sannsynligheten for at begge disse utfallene skjer samtidig. Igjen bestemmer vi sannsynligheten ved hjelp av sannsynlighetsvinduet i GeoGebra.



Figur 4: Sannsynligheten for at Birger hopper kortere enn 83 meter

$$\begin{aligned} P(\text{Maren vinner med 83 m}) &= P(B < 83) \cdot P(E < 83) \\ &= 0,7422 \cdot 0,7881 = \underline{\underline{0,5849}} \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at Maren vinner med et hopp på 83 meter er 0,5849.

2-2c Vi lager en simulering i Python hvor vi trekker hopplengder ut fra normalfordelingene til B , M og E . Deretter sjekker vi om Maren's hopp er det lengste hoppet.

```
from random import gauss
N = 100_000
antall_gunstige = 0

for i in range(N):
    # Trekker hopplengder fra normalfordelingene
    B = gauss(70, 20)
    M = gauss(80, 5)
    E = gauss(75, 10)

    # Sjekker om Maren's hopp er lengre enn både Espens og Birgers
    if (M > B and M > E):
        antall_gunstige += 1

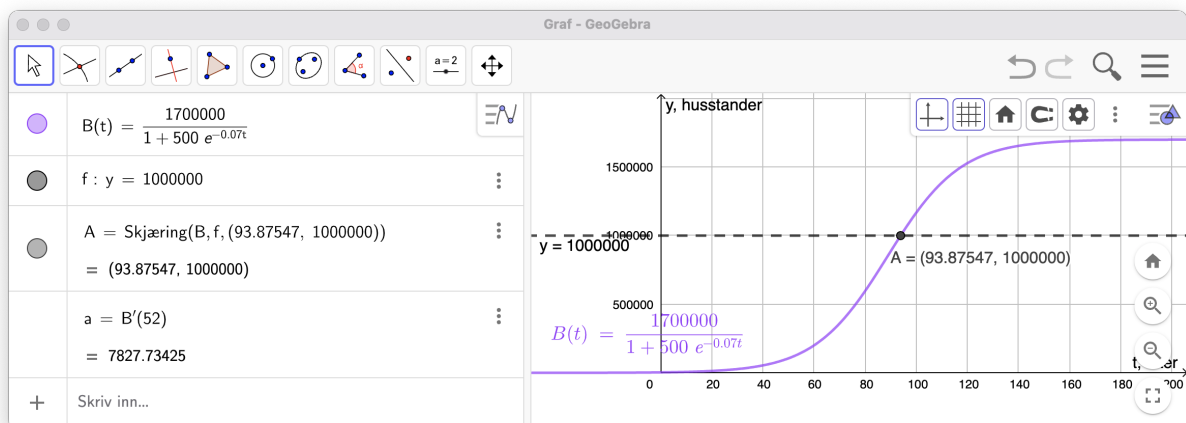
ssh = antall_gunstige / N

print(f"Det er omtrent {ssh * 100:.2f} % sannsynlighet for at Maren hopper lengst i  
↪ andre omgang")
```

Etter å ha kjørt programmet flere ganger ser jeg at sannsynligheten er stabil på omtrent 47,4 %.

Det er omtrent 47,4 % sannsynlighet for at Maren hopper lengst i andre omgang.

Oppgave 2-3



Figur 5: Logistisk modell for brannalarmer i by

2-3a Jeg la inn modellen i GeoGebra og la inn linja $y = 1\,000\,000$ for å sjekke når halvparten hadde fått systemet. Jeg fant skjæringen med B i punktet $A = (93,88, 1000000)$.

Det tar 94 uker før halvparten av husstandene i byen har brannvarslingssystemet ifølge modellen.

2-3b Se nederst i GeoGebra-utklippet.

$$\underline{\underline{B'(52) = 7827,7}}$$

Etter 52 uker (ett år) så selges brannvarslingssystemet til omtrent 7828 husstander per uke.

2-3c En logistisk modell er gitt ved

$$f(x) = \frac{N}{1 + a \cdot e^{-kx}}$$

- N er «bæreevnen» eller maksimalverdien for funksjonen
- $\frac{N}{1+a}$ vil være funksjonsverdien når $x = 0$
- Vi har raskest vekst i vendepunktet som vi finner i $(\frac{\ln a}{k}, \frac{N}{2})$

Med bakgrunn i opplysningene i oppgaveteksten kan vi bestemme $N = 1\,000\,000$ siden dette er antallet husstander de totalt selger til.

Videre vet vi at det er 4000 husstander som har systemet ved $x = 0$, derfor må

$$\frac{N}{1+a} = 4000 \iff \frac{1\,000\,000}{1+a} = 4000 \iff \frac{1000}{4} = 1+a \iff a = 250 - 1 = 249$$

Til sist vet vi at vendepunktet (den raskeste veksten) er i uke 65, altså må

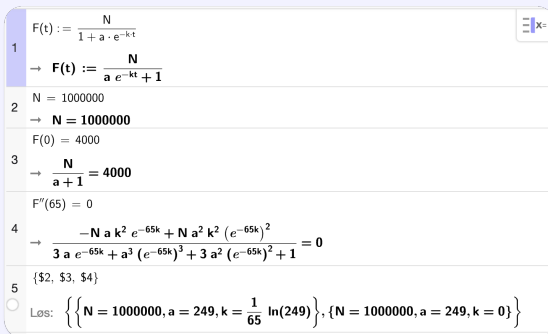
$$\frac{\ln a}{k} = 65 \iff \frac{\ln 249}{k} = 65 \iff 5,517 = 65k \iff k = \frac{5,517}{65} = 0,0849$$

En logistisk modell som passer til dataene vil være

$$\underline{\underline{F(t) = \frac{1\,000\,000}{1 + 249e^{-0,0849t}}}}$$

Løsning av 2-4 i CAS

Denne oppgaven kan også løses i CAS ved å sette opp 3 likninger for å bestemme N , a og k , se skjermbildet under. Du kan også gjøre regresjon på punktene $(0, 4000)$, $(65, 500\,000)$ og $(200, 1\,000\,000)$ med logistisk modell.



$$F(t) := \frac{N}{1 + a \cdot e^{-k \cdot t}}$$

$$\rightarrow F(t) := \frac{N}{a \cdot e^{-k \cdot t} + 1}$$

$$N = 1000000$$

$$\rightarrow N = 1000000$$

$$F(0) = 4000$$

$$\rightarrow \frac{N}{a + 1} = 4000$$

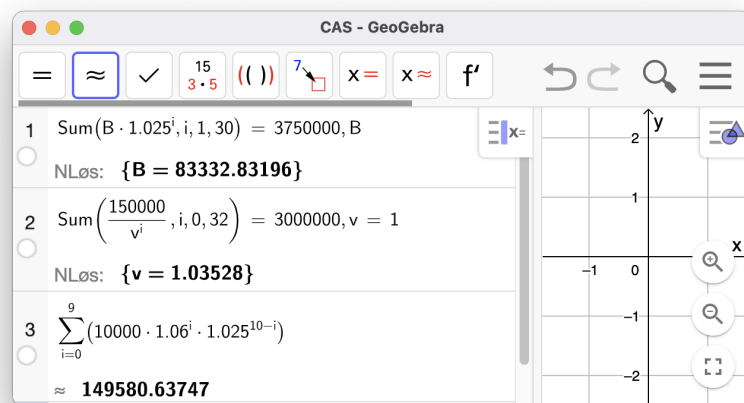
$$F'(65) = 0$$

$$\rightarrow \frac{-N a k^2 e^{-65k} + N a^2 k^2 (e^{-65k})^2}{3 a e^{-65k} + a^3 (e^{-65k})^3 + 3 a^2 (e^{-65k})^2 + 1} = 0$$

$$\{ \$2, \$3, \$4 \}$$

$$\text{Løs: } \left\{ \left\{ N = 1000000, a = 249, k = \frac{1}{65} \ln(249) \right\}, \{ N = 1000000, a = 249, k = 0 \} \right\}$$

Oppgave 2-4



$$1 \quad \text{Sum}(B \cdot 1.025^i, i, 1, 30) = 3750000, B$$

$$\text{NLøs: } \{B = 83332.83196\}$$

$$2 \quad \text{Sum}\left(\frac{150000}{v^i}, i, 0, 32\right) = 3000000, v = 1$$

$$\text{NLøs: } \{v = 1.03528\}$$

$$3 \quad \sum_{i=0}^9 (10000 \cdot 1.06^i \cdot 1.025^{10-i})$$

$$\approx 149580.63747$$

Figur 6: CAS-løsning av 2-4

2-4a Vi kaller det ukjente beløpet B . Nora skal sette inn B på konto 30 ganger. Det siste beløpet skal ha fått renter i 1 år, mens det første beløpet skal ha fått renter i 30 år.

For å ha 3 750 000 kr på konto etter 30 år så kan vi altså sette opp en likning med ei rekke. Likningen er løst i linje 1 i GeoGebra.

$$\underbrace{B \cdot 1,025^1}_{\text{År 2055}} + \underbrace{B \cdot 1,025^2}_{\text{År 2054}} + \cdots + \underbrace{B \cdot 1,025^{30}}_{\text{År 2026}} = 3\,750\,000$$

Nora må sette inn 83 333 kr hvert år for å nå målet.

2-4b Vi kaller den ukjente vekstfaktoren til renta v . Nora skal betale inn lånet over 33 terminer med første termin 1. januar 2026. Nåverdien (NV) til terminbeløpene vil være:

$$\underbrace{\frac{150\,000}{v^0}}_{\text{NV til 2026-beløpet}} + \underbrace{\frac{150\,000}{v^1}}_{\text{NV til 2027-beløpet}} + \dots + \underbrace{\frac{150\,000}{v^{32}}}_{\text{NV til 2058-beløpet}} = 3\,000\,000$$

Likningen er løst i linje 2 i GeoGebra.

Nora har regnet med at den årlige rentesatsen er 3,528 %.

2-4c Sparebeløpene til Nora kan sees på som en rekke der det første beløpet er 10000 kr og får renter i 10 år, mens det siste beløpet er $10000 \cdot 1,06^9$ og får renter i ett år.

$$\underbrace{10000 \cdot 1,06^0 \cdot 1,025^{10}}_{\text{Beløp år 0}} + \underbrace{10000 \cdot 1,06^1 \cdot 1,025^9}_{\text{Beløp år 1}} + \dots + \underbrace{10000 \cdot 1,06^9 \cdot 1,025^1}_{\text{Beløp år 9}}$$

Beløpet er beregnet i linje 3 i GeoGebra.

Nora vil ikke nå målet på 150 000 kr. Hun vil ha 149 581 kr på kontoen etter 10 år.

Alternativ løsning med målsøking i Excel

I regnearket nedenfor har jeg satt opp de tre deloppgavene i Excel for å løse med målsøking.

Oppgave a er løst ved å beregne innskuddet på kontoen i starten og slutten av hvert år. Noras sparebeløp er satt i celle C5. Ved å bruke målsøking og sette at celle C37 skal bli 3 750 000 kr ved å endre på C5 fikk jeg svaret 83 333 kr.

Oppgave b er løst ved å skrive inn restlånet 1. januar 2026, og beregne restlånene etter innbetaling hvert år. Restlånet etter innbetaling beregnes ved å sette avdraget lik $\frac{T}{v^{32-i}}$, der v er vekstfaktoren til renta og i er antall år siden 1. januar 2026. Renta ble funnet ved å gjøre målsøking der restlånet etter innbetaling skal være 0 kr i 2058.

Oppgave c. I denne oppgaven øker sparebeløpet med 6 % per år i kolonne O, samtidig som vi beregner renter i kolonner Q. I slutten av 2035 vil Nora ha 149 581 kr på konto.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Oppgave a				Oppgave b				Oppgave c							
2	Rente		2,50 %		Rente		3,53 %		Rente		2,50 %					
3	Sparebeløp		kr 83 332,83													
4																
5																
6																
7	År	Sparebeløp	Konto 1. jan	Konto 31. des	År	År etter start	Terminbeløp	Restlån før innbet.	Restlån etter innbet.	År	År etter start	Sparebeløp	Konto 1. jan	Konto 31. des		
8	2026	kr 83 332,83	kr 83 332,83	kr 85 416,15	2026	0	kr 150 000,00	kr 3 000 000,00	kr 2 950 533,99	2026	0	kr 10 000,00	kr 10 000,00	kr 10 250,00		
9	2027	kr 83 332,83	kr 168 748,98	kr 172 967,71	2027	1	kr 150 000,00	kr 2 950 533,99	kr 2 899 323,07	2027	1	kr 10 600,00	kr 20 850,00	kr 21 371,25		
10	2028	kr 83 332,83	kr 256 300,54	kr 262 708,05	2028	2	kr 150 000,00	kr 2 899 323,07	kr 2 846 305,67	2028	2	kr 11 236,00	kr 32 607,25	kr 33 422,43		
11	2029	kr 83 332,83	kr 346 040,89	kr 354 691,91	2029	3	kr 150 000,00	kr 2 846 305,67	kr 2 791 418,08	2029	3	kr 11 910,16	kr 45 332,59	kr 46 465,91		
12	2030	kr 83 332,83	kr 438 024,74	kr 448 975,36	2030	4	kr 150 000,00	kr 2 791 418,08	kr 2 734 594,33	2030	4	kr 12 624,77	kr 59 090,68	kr 60 567,94		
13	2031	kr 83 332,83	kr 532 308,19	kr 545 615,90	2031	5	kr 150 000,00	kr 2 734 594,33	kr 2 675 766,11	2031	5	kr 13 382,26	kr 73 950,20	kr 75 798,95		
14	2032	kr 83 332,83	kr 628 948,73	kr 644 672,45	2032	6	kr 150 000,00	kr 2 675 766,11	kr 2 614 862,73	2032	6	kr 14 185,19	kr 89 984,14	kr 92 233,75		
15	2033	kr 83 332,83	kr 728 005,28	kr 746 205,41	2033	7	kr 150 000,00	kr 2 614 862,73	kr 2 551 810,97	2033	7	kr 15 036,30	kr 107 270,05	kr 109 951,80		
16	2034	kr 83 332,83	kr 829 538,24	kr 850 276,70	2034	8	kr 150 000,00	kr 2 551 810,97	kr 2 486 535,05	2034	8	kr 15 938,48	kr 125 890,28	kr 129 037,54		
17	2035	kr 83 332,83	kr 933 609,53	kr 956 949,77	2035	9	kr 150 000,00	kr 2 486 535,05	kr 2 418 956,53	2035	9	kr 16 894,79	kr 145 932,33	kr 149 580,64		
18	2036	kr 83 332,83	kr 1 040 282,60	kr 1 066 289,67	2036	10	kr 150 000,00	kr 2 418 956,53	kr 2 348 994,16							
19	2037	kr 83 332,83	kr 1 149 622,50	kr 1 178 363,06	2037	11	kr 150 000,00	kr 2 348 994,16	kr 2 276 563,87							
20	2038	kr 83 332,83	kr 1 261 695,89	kr 1 293 238,29	2038	12	kr 150 000,00	kr 2 276 563,87	kr 2 201 578,59							
21	2039	kr 83 332,83	kr 1 376 571,12	kr 1 410 985,40	2039	13	kr 150 000,00	kr 2 201 578,59	kr 2 123 948,20							
22	2040	kr 83 332,83	kr 1 494 318,23	kr 1 531 676,19	2040	14	kr 150 000,00	kr 2 123 948,20	kr 2 043 579,39							
23	2041	kr 83 332,83	kr 1 615 009,02	kr 1 655 384,24	2041	15	kr 150 000,00	kr 2 043 579,39	kr 1 960 375,56							
24	2042	kr 83 332,83	kr 1 738 717,08	kr 1 782 185,00	2042	16	kr 150 000,00	kr 1 960 375,56	kr 1 874 236,71							
25	2043	kr 83 332,83	kr 1 865 517,84	kr 1 912 155,78	2043	17	kr 150 000,00	kr 1 874 236,71	kr 1 785 059,31							
26	2044	kr 83 332,83	kr 1 995 488,61	kr 2 045 375,83	2044	18	kr 150 000,00	kr 1 785 059,31	kr 1 692 736,16							
27	2045	kr 83 332,83	kr 2 128 708,66	kr 2 181 926,38	2045	19	kr 150 000,00	kr 1 692 736,16	kr 1 597 156,31							
28	2046	kr 83 332,83	kr 2 265 259,21	kr 2 321 890,69	2046	20	kr 150 000,00	kr 1 597 156,31	kr 1 498 204,87							
29	2047	kr 83 332,83	kr 2 405 223,52	kr 2 465 354,11	2047	21	kr 150 000,00	kr 1 498 204,87	kr 1 395 762,91							
30	2048	kr 83 332,83	kr 2 548 686,94	kr 2 612 404,11	2048	22	kr 150 000,00	kr 1 395 762,91	kr 1 289 707,31							
31	2049	kr 83 332,83	kr 2 695 736,95	kr 2 763 130,37	2049	23	kr 150 000,00	kr 1 289 707,31	kr 1 179 910,58							
32	2050	kr 83 332,83	kr 2 846 463,20	kr 2 917 624,78	2050	24	kr 150 000,00	kr 1 179 910,58	kr 1 066 240,76							
33	2051	kr 83 332,83	kr 3 000 957,61	kr 3 075 981,55	2051	25	kr 150 000,00	kr 1 066 240,76	kr 948 561,23							
34	2052	kr 83 332,83	kr 3 159 314,39	kr 3 238 297,25	2052	26	kr 150 000,00	kr 948 561,23	kr 826 730,55							
35	2053	kr 83 332,83	kr 3 321 630,08	kr 3 404 670,83	2053	27	kr 150 000,00	kr 826 730,55	kr 700 602,28							
36	2054	kr 83 332,83	kr 3 488 003,66	kr 3 575 203,75	2054	28	kr 150 000,00	kr 700 602,28	kr 570 024,82							
37	2055	kr 83 332,83	kr 3 658 536,59	kr 3 750 000,00	2055	29	kr 150 000,00	kr 570 024,82	kr 434 841,23							
38					2056	30	kr 150 000,00	kr 434 841,23	kr 294 889,03							
39					2057	31	kr 150 000,00	kr 294 889,03	kr 150 000,00							
40					2058	32	kr 150 000,00	kr 150 000,00	kr (0,00)							
41																

Figur 7: Regneark for løsning av Noras sparing og lån

Oppgave a				Oppgave b				Oppgave c					
Rente	2,50 %			Rente	3,53 %			Rente	2,50 %				
Sparebeløp	kr 85 416,15												
År	Sparebeløp	Konto 1. jan	Konto 31. des	År	År etter start	Terminbeløp	Restlån før innbet.	Restlån etter innbet.	År	År etter start	Sparebeløp	Konto 1. jan	Konto 31. des
2026	=C\$5	=C8	=D8*(1+\$C\$4)	2026	0	kr 150 000,00	kr 3 000 000,00	=J8-I8/(1+\$I\$4)^(32-H8)	2026	0	kr 10 000,00	=O8	=P8*(1+\$N\$4)
2027	=C\$5	=E8+C9	=D9*(1+\$C\$4)	2027	1	=I8	=K8	=J9-I9/(1+\$I\$4)^(32-H9)	2027	1	=O8*1,06	=Q8+O9	=P9*(1+\$N\$4)
2028	=C\$5	=E9+C10	=D10*(1+\$C\$4)	2028	2	=I9	=K9	=J10-I10/(1+\$I\$4)^(32-H10)	2028	2	=O9*1,06	=Q9+O10	=P10*(1+\$N\$4)
2029	=C\$5	=E10+C11	=D11*(1+\$C\$4)	2029	3	=I10	=K10	=J11-I11/(1+\$I\$4)^(32-H11)	2029	3	=O10*1,06	=Q10+O11	=P11*(1+\$N\$4)
2030	=C\$5	=E11+C12	=D12*(1+\$C\$4)	2030	4	=I11	=K11	=J12-I12/(1+\$I\$4)^(32-H12)	2030	4	=O11*1,06	=Q11+O12	=P12*(1+\$N\$4)
2031	=C\$5	=E12+C13	=D13*(1+\$C\$4)	2031	5	=I12	=K12	=J13-I13/(1+\$I\$4)^(32-H13)	2031	5	=O12*1,06	=Q12+O13	=P13*(1+\$N\$4)
2032	=C\$5	=E13+C14	=D14*(1+\$C\$4)	2032	6	=I13	=K13	=J14-I14/(1+\$I\$4)^(32-H14)	2032	6	=O13*1,06	=Q13+O14	=P14*(1+\$N\$4)
2033	=C\$5	=E14+C15	=D15*(1+\$C\$4)	2033	7	=I14	=K14	=J15-I15/(1+\$I\$4)^(32-H15)	2033	7	=O14*1,06	=Q14+O15	=P15*(1+\$N\$4)
2034	=C\$5	=E15+C16	=D16*(1+\$C\$4)	2034	8	=I15	=K15	=J16-I16/(1+\$I\$4)^(32-H16)	2034	8	=O15*1,06	=Q15+O16	=P16*(1+\$N\$4)
2035	=C\$5	=E16+C17	=D17*(1+\$C\$4)	2035	9	=I16	=K16	=J17-I17/(1+\$I\$4)^(32-H17)	2035	9	=O16*1,06	=Q16+O17	=P17*(1+\$N\$4)
2036	=C\$5	=E17+C18	=D18*(1+\$C\$4)	2036	10	=I17	=K17	=J18-I18/(1+\$I\$4)^(32-H18)					
2037	=C\$5	=E18+C19	=D19*(1+\$C\$4)	2037	11	=I18	=K18	=J19-I19/(1+\$I\$4)^(32-H19)					
2038	=C\$5	=E19+C20	=D20*(1+\$C\$4)	2038	12	=I19	=K19	=J20-I20/(1+\$I\$4)^(32-H20)					
2039	=C\$5	=E20+C21	=D21*(1+\$C\$4)	2039	13	=I20	=K20	=J21-I21/(1+\$I\$4)^(32-H21)					
2040	=C\$5	=E21+C22	=D22*(1+\$C\$4)	2040	14	=I21	=K21	=J22-I22/(1+\$I\$4)^(32-H22)					
2041	=C\$5	=E22+C23	=D23*(1+\$C\$4)	2041	15	=I22	=K22	=J23-I23/(1+\$I\$4)^(32-H23)					
2042	=C\$5	=E23+C24	=D24*(1+\$C\$4)	2042	16	=I23	=K23	=J24-I24/(1+\$I\$4)^(32-H24)					
2043	=C\$5	=E24+C25	=D25*(1+\$C\$4)	2043	17	=I24	=K24	=J25-I25/(1+\$I\$4)^(32-H25)					
2044	=C\$5	=E25+C26	=D26*(1+\$C\$4)	2044	18	=I25	=K25	=J26-I26/(1+\$I\$4)^(32-H26)					
2045	=C\$5	=E26+C27	=D27*(1+\$C\$4)	2045	19	=I26	=K26	=J27-I27/(1+\$I\$4)^(32-H27)					
2046	=C\$5	=E27+C28	=D28*(1+\$C\$4)	2046	20	=I27	=K27	=J28-I28/(1+\$I\$4)^(32-H28)					
2047	=C\$5	=E28+C29	=D29*(1+\$C\$4)	2047	21	=I28	=K28	=J29-I29/(1+\$I\$4)^(32-H29)					
2048	=C\$5	=E29+C30	=D30*(1+\$C\$4)	2048	22	=I29	=K29	=J30-I30/(1+\$I\$4)^(32-H30)					
2049	=C\$5	=E30+C31	=D31*(1+\$C\$4)	2049	23	=I30	=K30	=J31-I31/(1+\$I\$4)^(32-H31)					
2050	=C\$5	=E31+C32	=D32*(1+\$C\$4)	2050	24	=I31	=K31	=J32-I32/(1+\$I\$4)^(32-H32)					
2051	=C\$5	=E32+C33	=D33*(1+\$C\$4)	2051	25	=I32	=K32	=J33-I33/(1+\$I\$4)^(32-H33)					
2052	=C\$5	=E33+C34	=D34*(1+\$C\$4)	2052	26	=I33	=K33	=J34-I34/(1+\$I\$4)^(32-H34)					
2053	=C\$5	=E34+C35	=D35*(1+\$C\$4)	2053	27	=I34	=K34	=J35-I35/(1+\$I\$4)^(32-H35)					
2054	=C\$5	=E35+C36	=D36*(1+\$C\$4)	2054	28	=I35	=K35	=J36-I36/(1+\$I\$4)^(32-H36)					
2055	=C\$5	=E36+C37	=D37*(1+\$C\$4)	2055	29	=I36	=K36	=J37-I37/(1+\$I\$4)^(32-H37)					
				2056	30	=I37	=K37	=J38-I38/(1+\$I\$4)^(32-H38)					
				2057	31	=I38	=K38	=J39-I39/(1+\$I\$4)^(32-H39)					
				2058	32	=I39	=K39	=J40-I40/(1+\$I\$4)^(32-H40)					

Oppgave 2-5

Vi har fått oppgitt at

$$\int 1 \, dx + \int x \, dx + \int x^2 \, dx + \int x^3 \, dx + \dots = \int \frac{1}{1-x} \, dx \quad (1)$$

Vi gjennomfører resonnementet vårt i flere steg.

Integrasjon av høyre side

Vi ser først på høyre side av likning (1). Vi ser at vi kan integrere denne siden ved å gjøre variabelskiftet $u = 1 - x \implies \frac{du}{dx} = -1 \iff dx = -1 \cdot du$.

Integralet blir (sett bort fra integrasjonskonstantene)

$$\int \frac{1}{1-x} \, dx = \int \frac{1}{u} \cdot (-1) \, du = - \int \frac{1}{u} \, du = -\ln|1-x|$$

Integrasjon av venstre side

Vi gjennomfører så integrasjonene på venstre av likning (1) i oppgaveteksten og får

$$\int 1 \, dx + \int x \, dx + \int x^2 \, dx + \int x^3 \, dx + \dots = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

Ved å integrere begge sidene av likning (1) har vi altså foreløpig vist at:

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots = -\ln|1-x|$$

Vise at rekka er lik $\ln 2$

Vi skal vise at

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = \ln 2 \quad (2)$$

Vi sammenligner venstre side i likning (2) med svaret vi fikk da vi integrerte venstre side i likning (1).

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots \quad (3)$$

Ved sammenligning av leddene ser vi at $x = \frac{1}{2}$ er en løsning av likning (3).

Siden $x = \frac{1}{2}$, så sjekker vi hva $-\ln|1-x|$ gir oss når $x = \frac{1}{2}$

$$-\ln|1-x| = -\ln\left|1-\frac{1}{2}\right| = -\ln\left|\frac{1}{2}\right| = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\overset{0}{\ln 1} - \ln 2\right) = \ln 2$$

$\underbrace{\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}}_{\text{Regel: } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$

Vi har altså vist at

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots = -\ln|1-x|$$

Og for $x = \frac{1}{2}$ gjelder derfor:

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots = \ln 2$$