

Bokmål

Eksamensinformasjon

Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer. Delen uten og delen med hjelpemidler blir delt ut samtidig. Delen uten hjelpemidler skal leveres etter 2 timer. Etter 2 timer kan du bruke hjelpemidler. Delen med hjelpemidler skal leveres innen 5 timer.
Del uten hjelpemidler	Du kan bruke vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Del med hjelpemidler	Du kan bruke alle hjelpemidler, med unntak av internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. Du kan ikke bruke kunstig intelligens til å generere innhold i svaret ditt.
Framgangsmåte	Delen uten hjelpemidler har 5 oppgaver. Delen med hjelpemidler har 6 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som regneark, programmering, graftegner og CAS skal dokumenteres.
Veiledning om vurderingen	Poeng er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du • viser regneferdigheter og matematisk forståelse • gjennomfører logiske resonnementer • ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner • kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler • forklarer framgangsmåter og begrunner svar • skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger • vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger	Kilder for bilder, tegninger og grafiske framstillinger: https://pixabay.com/ Utdanningsdirektoratet.

DEL 1

Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Regn ut integralet

$$\int e^x \cdot x \, dx$$

Oppgave 2 (6 poeng)

Ta utgangspunkt i den aritmetiske rekken

$$-3 + 0 + 3 + \dots + 69$$

a) Bestem summen av rekken.

Ta utgangspunkt i den uendelige geometriske rekken

$$5 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \dots$$

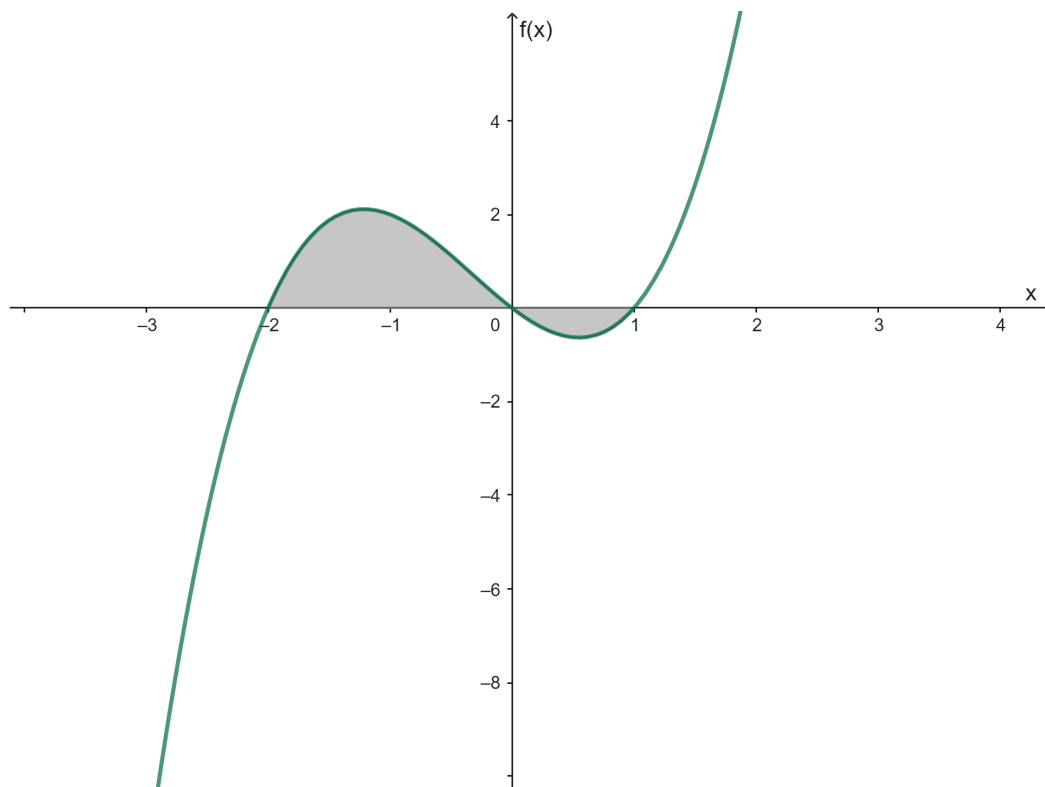
b) Bestem konvergensområdet til rekken.

En ball faller fra 2 meters høyde. Hver gang ballen treffer bakken, spretter den opp til en høyde som er 75 % av høyden den falt fra.

c) Hvor mange meter vil ballen bevege seg totalt?

Oppgave 3 (5 poeng)

Nedenfor ser du grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$.



- a) Hvilket av uttrykkene nedenfor gir arealet av det markerte området på figuren?
Husk å begrunne svaret ditt.

2. $\int_{-2}^1 f(x) dx$

2. $\int_{-2}^1 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$

3. $\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$

4. $\int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$

- b) Regn ut arealet av det markerte området på figuren.

Kristian ønsker å finne en verdi $a < 0$, som er slik at $\int_a^1 f(x) dx = 0$.

Han bruker en kalkulator og finner at $a \approx -0,6$.

Unni påstår at likningen til Kristian har to løsninger.

- c) Forklar hvorfor påstanden til Unni er riktig, og bruk figuren til å anslå omtrent hvilken verdi den andre løsningen kan ha.

Oppgave 4 (5 poeng)

I et spill kan du få poeng ved å kaste en terning med fire sider. De fire sidene har ulike farger. Den ene siden er gul, den andre grønn, den tredje rød og den fjerde blå.

- Gul side gir ingen poeng.
- Grønn side gir ett poeng.
- Blå side gir to poeng.
- Rød side gir tre poeng.

Du starter med 10 poeng, og hvert kast koster 2 poeng.

La x være endringen i poeng for hvert kast, det vil si poengene fra kastet fratrasket de to poengene kastet koster.

a) Skriv av tabellen og fyll inn det som mangler.

x		-1		
$P(X = x)$		$\frac{1}{4}$		

b) Bestem $E(x)$. Hva forteller dette svaret?

c) Bestem $Var(x)$.

Oppgave 5 (3 poeng)

På en skole med mange elever er høyden til elevene tilnærmet normalfordelt med en forventningsverdi på 170 cm og et standardavvik på 5 cm.

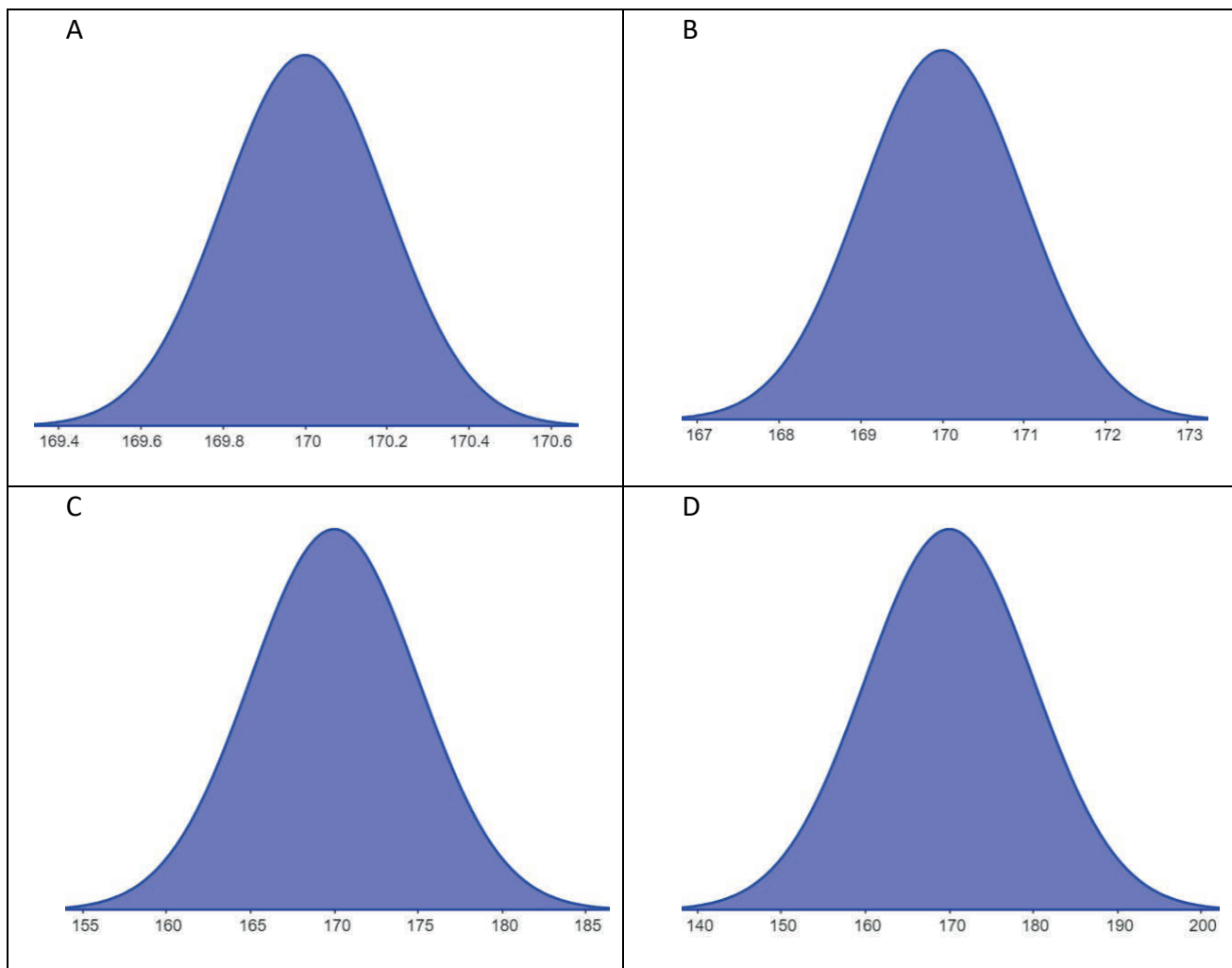
Vi trekker ut én tilfeldig elev fra skolen og måler hvor høy eleven er.

a) Hvilken figur nedenfor viser sannsynlighetsfordelingen til denne hendelsen?

Vi trekker ut 25 tilfeldige elever fra skolen, måler hvor høye elevene er, og regner ut gjennomsnittshøyden.

b) Hvilken figur nedenfor viser sannsynlighetsfordelingen til denne hendelsen?

Husk å begrunne svarene dine.



DEL 2

Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Et hagesenter ønsker å satse på salg av en ny type planter. De startet salget av plantene i uke 17. Utover våren økte salget. I tabellen nedenfor ser du inntekten fra salget av plantene de første ukene.

Uke	17	18	19	20	21	22	23	24
Inntekt (kr/uke)	2 900	4 400	12 200	23 400	28 800	34 600	41 000	40 800

- a) Bruk informasjonen i tabellen til å lage en modell I på formen

$$I(t) = \frac{B}{1 + a \cdot e^{-kt}}$$

for inntekten $I(t)$ kroner per uke, t uker etter uke 17.

Vurder modellens gyldighetsområde.

- b) Når økte inntekten mest, ifølge modellen? Hvor mye økte inntekten med på dette tidspunktet?

- c) Løs likningen

$$\int_0^x I(t) dt = 65000$$

Gi en praktisk tolkning av svaret.

Oppgave 2 (5 poeng)

En bedrift produserer og selger en vare. Kostnaden $K(x)$ kroner ved å produsere x enheter av varen per dag er gitt ved

$$K(x) = 700 \cdot e^{\frac{x}{200}}, \quad x \in \langle 0, 500 \rangle$$

- a) Bestem $K'(150)$. Gi en praktisk tolkning av svaret.
- b) Bestem produksjonsmengden som gir den laveste enhetskostnaden. Hva blir denne enhetskostnaden?

Bedriften selger alle varene den produserer. Inntekten $I(x)$ kroner ved salg av x enheter av varen per dag er gitt ved

$$I(x) = 80x - 0,10x^2$$

- c) Hvor mange enheter av varen må bedriften produsere og selge for å gå med overskudd?

Oppgave 3 (4 poeng)

En bedrift har en maskin som lager elektroniske komponenter. Firmaet MASK, som leverte maskinen til bedriften, oppgir at andelen feilproduserte komponenter vil være 1 % eller mindre.

Bedriften tester maskinen ved å lage 20 komponenter. Det viser seg at det er feil på én komponent. Bedriften klager til MASK og påstår at maskinen lager en høyere andel feilproduserte komponenter enn oppgitt.

- a) Bruk hypotesetesting og argumenter for om klagen er velbegrunnet.

MASK sender en kontrollør til bedriften. Kontrolløren tester mange komponenter fra maskinen og finner også feil på én komponent. Kontrolløren påstår at med det antallet komponenter han har testet, så er det mer enn 95 % sannsynlighet for at andelen feilproduserte komponenter er 1 % eller mindre.

- b) Hva er det minste antallet komponenter kontrolløren kan ha testet for å påstå dette?

Oppgave 4 (6 poeng)

Mathias ønsker å kjøpe seg en bil. Han går innom nærmeste bilforhandler, der han ser to ulike biler som vekker interesse.

Mathias har ingen egenkapital og må derfor låne hele beløpet. Bilforretningen gir Mathias følgende to tilbud for bilene:

- **Tilbud 1**

En brukt dieselbil. Pris 357 000 kroner. Nedbetalingstid 8 år, med én termin per år. Første innbetaling etter ett år. Rentesats 4%.

- **Tilbud 2**

En ny elbil. Pris 450 000 kroner. Nedbetalingstid 10 år, med én termin per år og terminbeløp på 52 000 kroner. Første innbetaling etter ett år.

- a) Sett opp en geometrisk rekke som viser hvor mye Mathias må betale for den brukte dieselbilen. Bruk rekken til å bestemme terminbeløpene Mathias må betale dersom han kjøper bilen.
- b) Bestem rentesatsen Mathias får dersom han velger å kjøpe elbilen.
- c) Hvilket tilbud fører til at Mathias må betale mest renter totalt?

Oppgave 5 (3 poeng)

Wiggo har en spareplan. De fem første dagene sparer han følgende beløp:

Dag 1: 1 krone
Dag 2: 5 kroner
Dag 3: 10 kroner
Dag 4: 16 kroner
Dag 5: 23 kroner

Etter disse fem dagene har han 55 kroner på konto. Wiggo ønsker å fortsette med denne sparingen i samme mønster i dagene framover.

Beskriv den rekursive sammenhengen mellom sparebeløpene.

Lag et program som bruker denne rekursive sammenhengen til å vise hvor mange dager Wiggo må spare før han har 100 000 kroner på konto.

Husk å legge ved skjermbilde av både programkoden og resultatet du får når du kjører programmet.

Oppgave 6 (4 poeng)

Ane har en vanlig sekssidet terning. Hun ønsker å finne ut hvor mange ganger hun i gjennomsnitt må kaste terningen for å få det samme antallet øyne i to kast på rad.



Hun har laget tabellen nedenfor.

Kast nummer	1	2	3	4	5	6	...
Sannsynlighet for at kastet er nødvendig	1	1	$\frac{5}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$	...

a) Forklar at

$$1 + 1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots$$

vil gi det forventede antallet kast Ane må gjøre for å få det samme antallet øyne i to kast på rad.

Bestem denne verdien.

b) Bruk simulering til å bestemme forventningsverdien til summen av antall øyne Ane vil få på terningen i kastene hun bruker for å få det samme antallet øyne i to kast på rad.

Vedlegg 1

Standard normalfordeling

Tabellen viser $P(Z \leq z)$ for $-3,09 \leq z \leq 3,09$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Blank side

Blank side