

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer. Delen uten og delen med hjelpemidler skal deles ut samtidig. Delen uten hjelpemidler skal leveres etter 2 timer. Etter 2 timer kan kandidaten bruke hjelpemidler. Delen med hjelpemidler skal leveres innen 5 timer.
Del uten hjelpemidler	Vanlige skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler.
Del med hjelpemidler	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon. Automatisk tekstgenerator som chatbot, copilot eller tilsvarende teknologi er ikke tillatt.
Framgangsmåte	Delen uten hjelpemidler har 5 oppgaver. Delen med hjelpemidler har 6 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi noe uttelling. Bruk av digitale verktøy skal dokumenteres.
Veiledning om vurderingen	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger – vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger	Tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet.

Del 1

Oppgave 1 (6 poeng)

- a) Regn ut integralet

$$\int x^2 \cdot \ln x \, dx$$

- b) Bestem x når

$$\int_{-1}^x (3t^2 - 1) dt = 0, \quad x > -1$$

- c) Gi en praktisk tolkning av svaret i oppgave b).

Oppgave 2 (6 poeng)

- a) Finn summen av den aritmetiske rekken $3 + 7 + 11 + 15 + \dots + 399$.
- b) Bestem kvotienten k for en uendelig geometrisk rekke som konvergerer og som har $a_1 = 12$ og sum = 18.
- c) Vis at tallet $0,75757575\dots$ kan skrives som en uendelig geometrisk rekke.
Bruk dette til å vise at $1,75757575\dots = \frac{58}{33}$.

Oppgave 3 (2 poeng)

Tabellen viser sannsynlighetsfordelingen til en stokastisk variabel X .

x	0	1	4	b
$P(X = x)$	0,30	0,40	0,10	0,20

$$E(X) = 2.$$

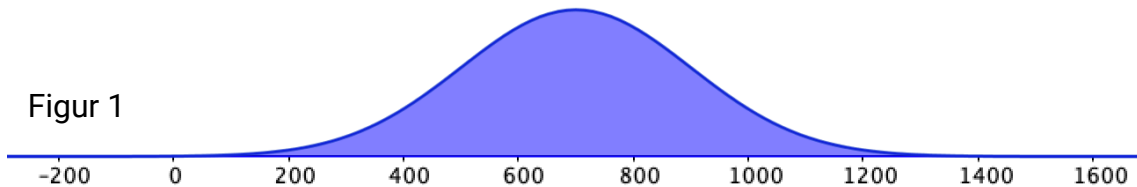
Vis at $b = 6$, og bestem $\text{Var}(X)$.

Oppgave 4 (4 poeng)

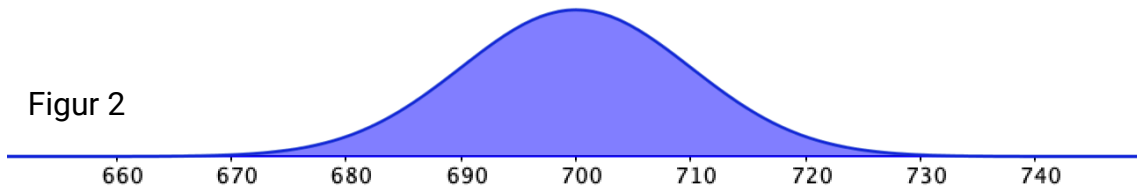
En gartner sår 1000 frø. Frøene har en spireevne på 70 %.

- a) Hvilken av de to figurene nedenfor viser sannsynlighetstettheten for antall frø som spirer?
Husk å begrunne svaret ditt.

Figur 1



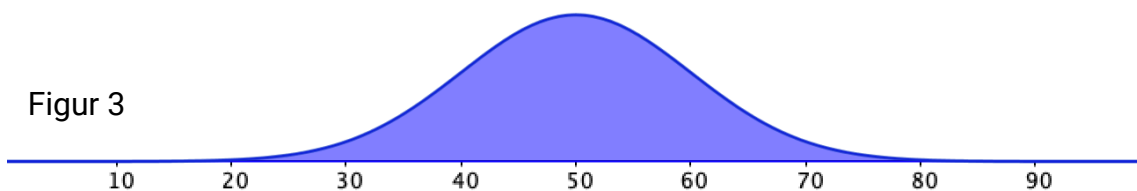
Figur 2



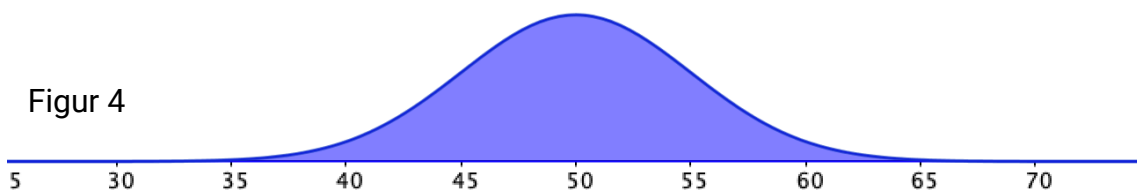
En stokastisk variabel er normalfordelt med $E(X) = 50$ og $\sigma = 10$.

- b) Hvilken av de to figurene nedenfor viser sannsynlighetstettheten til denne stokastiske variabelen?
Husk å begrunne svaret ditt.

Figur 3



Figur 4



Oppgave 5 (4 poeng)

En bedrift produserer og selger en vare der kostnaden $K(x)$, oppgitt i kroner, er gitt ved

$$K(x) = 0,3x^2 + 10x + 3000$$

Her er x antall produserte og solgte enheter per uke.

- a) For hvilken x -verdi er grensekostnaden lik enhetskostnaden?
Gi en praktisk tolkning av svaret.

Bedriften regner med å selge varen for 400 kroner per enhet.

- b) Hvor mange enheter må bedriften produsere og selge for at overskuddet skal bli størst mulig?

Del 2

Oppgave 1 (6 poeng)

Marco skal løpe maraton og starter løpetrening. I tabellen nedenfor ser du hvor mange kilometer han løp noen av ukene etter at han startet treningen.

Uker etter treningsstart (t)	1	5	10	15	20
Antall kilometer løpt per uke (L)	14	32	80	115	145

a) Vis at funksjonen L gitt ved

$$L(t) = \frac{156,31}{1 + 12,21e^{-0,24t}}$$

er en god modell for sammenhengen mellom uker etter treningsstart (t) og antall kilometer løpt per uke (L).

Forklar hvorfor en modell av denne typen kan passe godt til denne praktiske situasjonen.

b) Når økte antallet løpte kilometer per uke raskest, ifølge modellen?
Hvor stor var økningen da?

Marco merket etter noen uker at løpeskoene begynte å bli slitt, og at han trengte nye sko. Han bestemte seg for å kjøpe nye sko etter å ha løpt totalt 500 km.

c) Hvor mange uker hadde Marco løpt da han kjøpte seg nye sko?
Hvor mange kilometer hadde han løpt i gjennomsnitt per uke før dette?

Oppgave 2 (4 poeng)

En bedrift skal ansette en ny person i en stilling og har fått 100 godt kvalifiserte søkere. 60 av søkerne er kvinner, og 40 av søkerne er menn. Ledelsen i bedriften rekker ikke å intervju alle, derfor blir 8 kvinner og 12 menn tilfeldig invitert til intervju av ledelsen.

Fagforeningen lurer på om dette faktisk er tilfeldig, eller om ledelsen bevisst velger menn. De ber deg gjennomføre en hypotesetest med signifikansnivå 5 %.

- Formuler nullhypotesen H_0 og alternativhypotesen H_1 for testen. Forklar hvorfor en hypergeometrisk sannsynlighetsfordeling er mest passende for denne testen.
- Gjennomfør hypotesetesten og vurder om det er grunnlag for å si at ledelsen bevisst velger menn.

Oppgave 3 (4 poeng)

Avgjør om hver enkelt påstand nedenfor er sann eller usann. Forklar tydelig hvordan du har resonnert.

- En uendelig geometrisk rekke er gitt ved $1 + (\ln x - 1) + (\ln x - 1)^2 + \dots$.

Påstand: Dersom $x = \frac{1}{e}$ vil summen av rekka være $\frac{1}{3}$.

- To funksjoner er gitt ved $f(x) = x^3 - x^2 - ax$, der $a \in \mathbb{R}$, og $g(x) = -x^2 + x$.

Påstand: Grafene til f og g avgrenser to områder som er like store når $a > -1$.

Oppgave 4 (4 poeng)

- Bestem en rekursiv formel for tallfølgen 1, 2, 6, 15, 31, 56,
- Bruk den rekursive formelen du fant i oppgave a), og lag et program som regner ut summen av de 30 første leddene i tallfølgen.

Husk å legge ved bilde av både koden og resultatet av kjøringen.

Oppgave 5 (6 poeng)

Ole vil studere i Tyskland og skal fullføre en mastergrad i løpet av 5 år. Han undersøker hva han kan få i stipend og lån fra Lånekassen for å dekke opphold og skolepenger.

Etter 5 år vil det samlede lånebeløpet være 799 273 kr.
Rentesatsen er 5,242 % per år.

Rentene i Lånekassen begynner først å løpe rett etter fullført studium. Første avdrag betales ett år etter at du har fullført studiet. Nedbetalingstid er maks 30 år med én termin per år.

Beregn hvor mye hele utdanningen vil koste

Her kan du beregne cirka hvor mye hele utdanningen din vil koste, hvor mye du kan få i stipend og hvor mye du må betale tilbake etter du er ferdig.

Antall år med stipend og lån

– 5 +

Minimum lån du må betale tilbake

799 273 kr

Utrekningen tar utgangspunkt i 2 % årlig økning av stipend og lån, og forutsetter at du oppfyller vilkårene for omgjøring.

Maksimalt stipend

489 299 kr

- a) Vis at terminbeløpene Ole må betale, blir 53 437 kr dersom han velger maks nedbetalingstid.

Det er forventet at rentesatsen blir lavere fremover. Ole regner litt på det og tenker at med den forventede rentesatsen kan han klare å betale ned lånet på 25 år, med det samme terminbeløpet som i oppgave a).

- b) Hva må rentesatsen være hvis han skal klare det?

Ole tenker at han etter hvert kan klare å betale et større terminbeløp. Han ser for seg at han betaler samme terminbeløp som i oppgave a) de 12 første årene. Deretter øker han terminbeløpet med 5 % per termin resten av nedbetalingstiden. Han antar at rentesatsen vil være 5,242 % per år gjennom hele perioden.

- c) Hvor mange år vil det ta før lånet er nedbetalt, dersom Ole klarer dette?

Oppgave 6 (4 poeng)

En bedrift produserer og selger en vare. Kostnaden $K(x)$ i kroner er gitt ved

$$K(x) = 0,2x^2 + 50x + 1500$$

der x er antall enheter.

Etterspørselen etter varen er gitt ved

$$E(p) = 300e^{-0,01p}$$

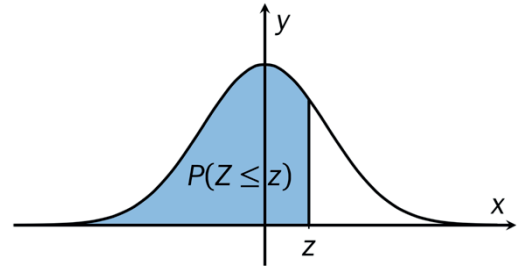
der p er prisen per vare i kroner.

- a) Regn ut $E(30)$.
Gi en praktisk tolkning av svaret du får.
- b) Finn et uttrykk $I(x)$ for inntekten som funksjon av antall solgte enheter.

Vedlegg 1

Standard normalfordeling

Tabellen viser $P(Z \leq z)$ for $-3,09 \leq z \leq 3,09$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990