

17.11.2025

Eksamen

REA3058 Matematikk R2

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk

Eksamensinformasjon

Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timar. Delen utan og delen med hjelpemiddel blir delte ut samstundes. Delen utan hjelpemiddel skal leverast etter 3 timar. Etter 3 timar kan du bruke hjelpemiddel. Delen med hjelpemiddel skal leverast innan 5 timar.
Del utan hjelpemiddel	Du kan bruke vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Del med hjelpemiddel	Du kan bruke alle hjelpemiddel, med unntak av internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon. Du kan ikkje bruke kunstig intelligens til å generere innhald i svaret ditt.
Framgangsmåte	Delen utan hjelpemiddel har 8 oppgåver. Delen med hjelpemiddel har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Dersom oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, kan ein alternativ metode gi låg/noka utteljing. Bruk av digitale verktøy som rekneark, programmering, grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
Rettleiing om vurderinga	Poeng er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du • viser rekneferdigheiter og matematisk forståing • gjennomfører logiske resonnement • ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar • kan bruke formålstenlege hjelpemiddel • forklarar framgangsmåtar og grunngir svar • skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar • vurderer om svar er rimelege
Andre opplysningar	Kjelder for bilete, teikningar og grafiske framstillingar: https://pixabay.com/ Utdanningsdirektoratet.

DEL 1

Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (2 poeng)

Bestem integralet

$$\int 4x \cdot \cos x \, dx$$

Oppgåve 2 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \sqrt{x+4} \quad , \quad D_f = [0, 10]$$

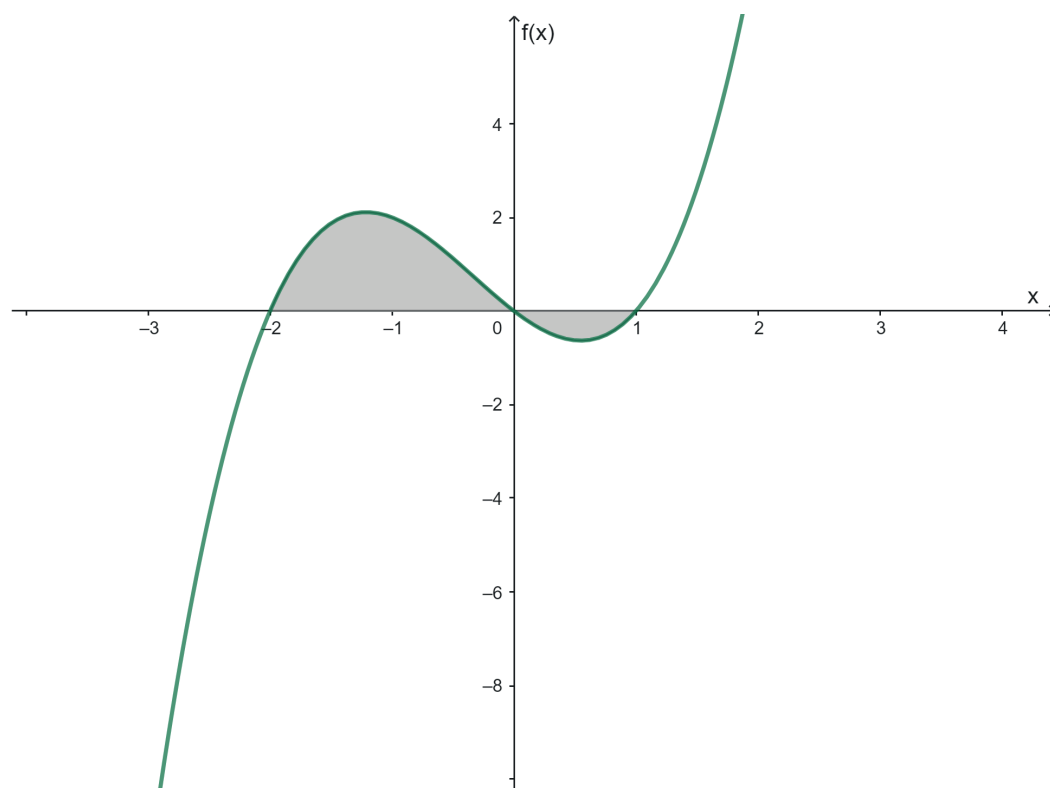
Innsida av ein kopp har same form som vi får når vi dreier grafen til f 360° om førsteaksen i eit koordinatsystem der eininga langs aksane er cm.

Kor mykje kakao er det plass til i koppen dersom han blir fylt heilt opp?



Oppgave 3 (5 poeng)

Nedanfor ser du grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$.



- a) Kva for eitt av uttrykka nedanfor gir arealet av det markerte området på figuren? Hugs å grunngi svaret ditt.

1. $\int_{-2}^1 f(x) dx$

2. $\int_{-2}^1 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$

3. $\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$

4. $\int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$

- b) Rekn ut arealet av det markerte området på figuren.

Kristian ønskjer å finne ein verdi $a < 0$, som er slik at $\int_a^1 f(x) dx = 0$.

Han bruker ein kalkulator og finn at $a \approx -0,6$.

Unni påstår at likninga til Kristian har to løysingar.

- c) Forklar kvifor påstanden til Unni er rett, og bruk figuren til å anslå omtrent kva verdi den andre løysinga kan ha.

Oppgave 4 (4 poeng)

a) Løys likninga

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0 \quad , \quad x \in [0, 2\pi)$$

Ta utgangspunkt i likninga

$$\left(\sin x - \frac{1}{2} \right) (\sin x - a) = 0 \quad , \quad x \in [0, 2\pi) \text{ og } a \in \mathbb{R}$$

b) For kva verdier av a har likninga høvesvis to, tre og fire løysingar?

Oppgave 5 (2 poeng)

Avgjer om kvar av påstandane nedanfor er sann eller usann.
Hugs å grunngi svara dine.

Påstand 1

Vi kan tolke arealet under ein fartsgraf som akselerasjon.

Påstand 2

Ein vinkel på 36° er det same som ein vinkel på $\frac{\pi}{5}$ radianar.

Oppgave 6 (6 poeng)

Ta utgangspunkt i den aritmetiske rekkja

$$-3 + 0 + 3 + \dots + 69$$

a) Bestem summen av rekkja.

Ta utgangspunkt i den uendelege geometriske rekkja

$$5 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \dots$$

b) Bestem konvergensområdet til rekkja.

Ein ball fell frå 2 meters høgd. Kvar gong ballen treffer bakken, sprett han opp til ei høgd som er 75 % av høgda han fall frå.

c) Kor mange meter vil ballen bevege seg totalt?

Oppgave 7 (6 poeng)

Ei likning for ei kuleflate S er gitt ved

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z = 4$$

a) Bestem sentrum og radius til kuleflata S .

Ei anna kuleflate K har sentrum i $(1, -1, 3)$ og radius 2.

Eit plan α tangerer kuleflata K i punktet $P(3, -1, 3)$.

b) Bestem ei likning for plan α .

Eit anna plan β er gitt ved

$$3x + y - 2z + 1 = 0$$

c) Avgjer om plan β vil skjere gjennom kuleflata K .

Oppgave 8 (3 poeng)

Vis ved induksjon at

$$1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3} \text{ for } n \geq 0$$

DEL 2

Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (6 poeng)



Ein miniubåt passerer 250 meter under ei bøye som ligg på havoverflata.

I eit koordinatsystem der x -aksen og y -aksen ligg parallelt med havoverflata, z -aksen står normalt på havoverflata, og eininga langs aksane er meter, er posisjonen til miniubåten t sekund etter passeringa gitt ved

$$\vec{r}(t) = [6t, 7t, -250 - 5t + 0,1t^2] \quad \text{der} \quad t \in [0, 60]$$

- a) Bestem farten til miniubåten etter 2 sekund.
- b) Kor langt under havoverflata er miniubåten på det djupaste?

Posisjonen til ein fiskestim i området t sekund etter at miniubåten passerte under bøya, er gitt ved

$$\vec{s}(t) = [40 + 2t, 60 + 2t, -250] \quad \text{der} \quad t \in [0, 60]$$

Fiskestimen har ei tilnærma kuleform med radius på 15 meter. Miniubåten er 4 meter brei, 5 meter høg og 8 meter lang.

- c) Gjer berekningar og vurder om miniubåten kjem til å kollidere med fiskestimen.

Oppgave 2 (6 poeng)

Tabellen nedanfor viser elektrisk spenning målt i ein stikkontakt i Noreg.

Sekund etter at målingane starta (t)	0,0020	0,0050	0,0070	0,0100	0,0130	0,0150	0,0180	0,0200
Målt spenning (U)	189	323	259	-2,12	-261	-327	-189	3,52

- a) Bestem ein modell U for spenninga $U(t)$ volt (V) i stikkontakten t sekund etter at målingane starta.
- b) På kva tidspunkt i løpet av dei første 0,0200 sekunda er spenninga 230 V ifølgje modellen?

Nettspenninga i Noreg (den elektriske spenninga i vanlege stikkontaktar) er 230 V.

Truls lurar på om målingane som er gjorde, kan vere rette. Han finn ut at spenninga i kontakten er ei vekselspanning. Det betyr at spenninga varierer periodisk med tida. Når spenninga blir oppgitt å vere 230 V, er dette noko som kallast effektivverdien til spenninga og er gitt ved

$$U_{\text{effektiv}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (U(t))^2 dt}$$

der T er perioden til funksjonen U .

- c) Bruk modellen frå oppgave a og formelen ovanfor til å hjelpe Truls med å avgjere om målingane kan vere rette.

Oppgave 3 (4 poeng)

Karbontetraklorid (CCl_4) er eit skadeleg stoff som blir brote sakte ned i kroppen og delvis lagra i feittvev. Så lenge konsentrasjonen av CCl_4 i kroppen er under 10 einingar, klarer lever å skilje ut stoffet som normalt. Når konsentrasjonen overstig 10 einingar, begynner ammoniakk å hope seg opp i blodet, og det blir potensielt farleg.

Sofie skal bu nær eit gammalt industriområde der det har gått føre seg ulovleg dumping av kjemikaliar. Kvar natt kjem ho til å puste inn CCl_4 som fordampar frå grunnen og kjem inn på soverommet hennar gjennom ventilasjon og sprekkar i kjellaren.

Sofie blir utsett for 2 einingar CCl_4 per natt. Vi reknar med at kroppen hennar klarer å skilje ut 18 % av total mengd i kroppen i løpet av ein dag.

Anta at Sofie berre skil ut CCl_4 når ho ikkje blir utsett for stoffet, og at ho berre blir utsett for CCl_4 om natta.

- a) Rekn ut kor mange netter Sofie kan sove på soverommet sitt før konsentrasjonen av CCl_4 i kroppen hennar kjem opp på eit potensielt farleg nivå.

Sofie les ein artikkel om CCl_4 der det blir påstått at ein voksen person aldri vil ha meir enn 10 einingar av stoffet i kroppen dersom personen blir utsett for 2 einingar CCl_4 per natt.

- b) Rekn ut kor mange prosent av mengda CCl_4 artikkelen antek at ein voksen person skil ut frå kroppen per dag.

Oppgave 4 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 3^{2x}$$

Programmet nedanfor berekner arealet avgrensa av grafen til f , x -aksen og linjene $x = 0$ og $x = 2$ ved hjelp av to ulike metodar.

```
1  start = 0
2  slutt = 2
3  n = 100
4
5  dx = (slutt-start)/n
6
7  def f(x):
8      return 3**(2*x)
9
10 def areal_til_hogre():
11     areal = 0
12     for i in range(n):
13         x = start + i*dx
14         areal = areal + f(x)*dx
15     return areal
16
17 def areal_til_venstre():
18     areal = 0
19     for i in range(1, n+1):
20         x = start + i*dx
21         areal = areal + f(x)*dx
22     return areal
23
24 print(areal_til_hogre())
25 print(areal_til_venstre())
```

- a) Forklar kvifor den eine metoden vil gi ein litt for høg verdi for arealet, og den andre metoden ein litt for låg verdi.

- b) Lag eit program som bereknar arealet meir nøyaktig utan å dele det opp i fleire delar. Ta utgangspunkt i koden nedanfor, og skriv ferdig funksjonen «betre_metode()». Om du programmerer i eit anna programmeringsspråk enn Python, må du først skrive ein kode som samsvarer med koden nedanfor i språket du bruker.

Hugs å leggje ved skjermbilete av programmet du lagar, og resultatet du får når du køyrer programmet.

```
1  start = 0
2  slutt = 2
3  n = 100
4
5  dx = (slutt-start)/n
6
7  def f(x):
8      return 3**(2*x)
9
10 def betre_metode():
11     areal = 0
12
13     #skriv ny kode her
14
15     return areal
16
17 print(betre_metode())
```

tips til deg som akkurat har fått eksamensoppgåva:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

tips til deg som akkurat har fått eksamensoppgaven:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!