

Bokmål

Eksamensinformasjon

Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer. Delen uten og delen med hjelpemidler blir delt ut samtidig. Delen uten hjelpemidler skal leveres etter 3 timer. Etter 3 timer kan du bruke hjelpemidler. Delen med hjelpemidler skal leveres innen 5 timer.
Del uten hjelpemidler	Du kan bruke vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Del med hjelpemidler	Du kan bruke alle hjelpemidler, med unntak av internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. Du kan ikke bruke kunstig intelligens til å generere innhold i svaret ditt.
Framgangsmåte	Delen uten hjelpemidler har 8 oppgaver. Delen med hjelpemidler har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som regneark, programmering, graftegner og CAS skal dokumenteres.
Veiledning om vurderingen	Poeng er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du • viser regneferdigheter og matematisk forståelse • gjennomfører logiske resonnementer • ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner • kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler • forklarer framgangsmåter og begrunner svar • skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger • vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger	Kilder for bilder, tegninger og grafiske framstillinger: https://pixabay.com/ Utdanningsdirektoratet.

DEL 1

Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Bestem integralet

$$\int 4x \cdot \cos x \, dx$$

Oppgave 2 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

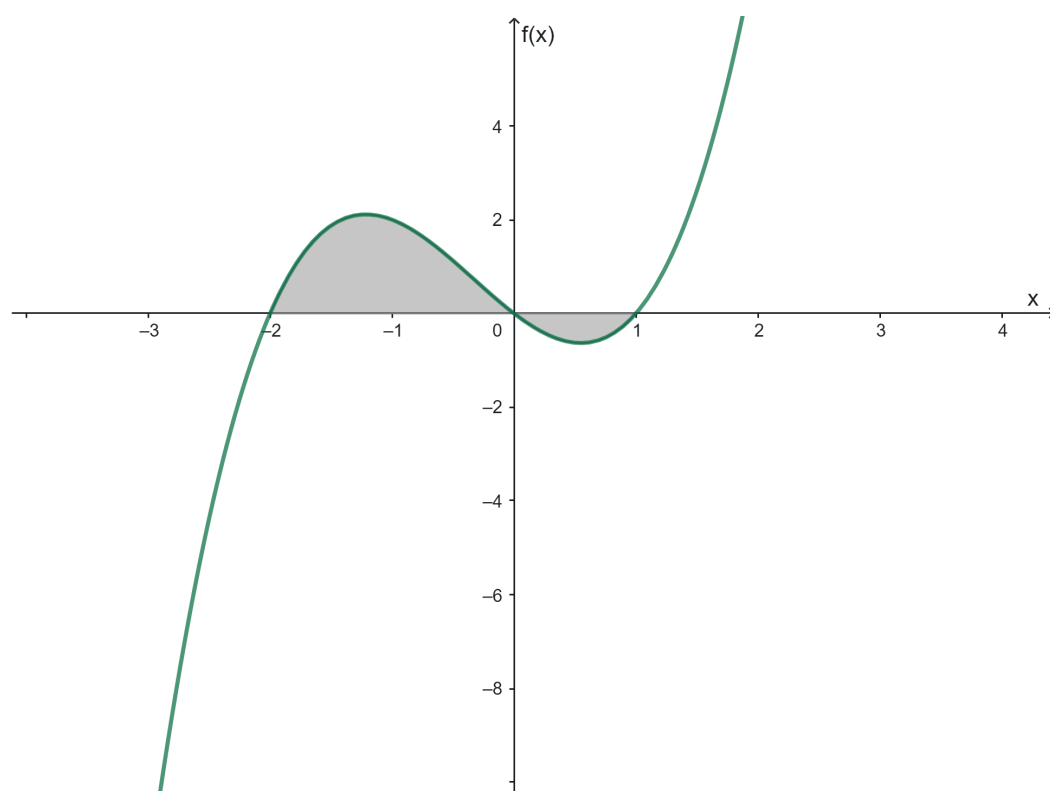
$$f(x) = \sqrt{x+4} \quad , \quad D_f = [0, 10]$$

Innsiden av en kopp har samme form som vi får når vi dreier grafen til f 360° om førsteaksen i et koordinatsystem der enheten langs aksene er cm.

Hvor mye kakao er det plass til i koppen dersom den fylles helt opp?

Oppgave 3 (5 poeng)

Nedenfor ser du grafen til funksjonen f gitt ved $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$.



- a) Hvilket av uttrykkene nedenfor gir arealet av det markerte området på figuren?
Husk å begrunne svaret ditt.

2. $\int_{-2}^1 f(x) dx$

2. $\int_{-2}^1 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$

3. $\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$

4. $\int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$

- b) Regn ut arealet av det markerte området på figuren.

Kristian ønsker å finne en verdi $a < 0$, som er slik at $\int_a^1 f(x) dx = 0$.

Han bruker en kalkulator og finner at $a \approx -0,6$.

Unni påstår at likningen til Kristian har to løsninger.

- c) Forklar hvorfor påstanden til Unni er riktig, og bruk figuren til å anslå omtrent hvilken verdi den andre løsningen kan ha.

Oppgave 4 (4 poeng)

a) Løs likningen

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0, \quad x \in [0, 2\pi)$$

Ta utgangspunkt i likningen

$$\left(\sin x - \frac{1}{2} \right) (\sin x - a) = 0, \quad x \in [0, 2\pi) \text{ og } a \in \mathbb{R}$$

b) For hvilke verdier av a har likningen henholdsvis to, tre og fire løsninger?

Oppgave 5 (2 poeng)

Avgjør om hver av påstandene nedenfor er sann eller usann.
Husk å begrunne svarene dine.

Påstand 1

Vi kan tolke arealet under en fartsgraf som akselerasjon.

Påstand 2

En vinkel på 36° er det samme som en vinkel på $\frac{\pi}{5}$ radianer.

Oppgave 6 (6 poeng)

Ta utgangspunkt i den aritmetiske rekken

$$-3 + 0 + 3 + \dots + 69$$

- a) Bestem summen av rekken.

Ta utgangspunkt i den uendelige geometriske rekken

$$5 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \dots$$

- b) Bestem konvergensområdet til rekken.

En ball faller fra 2 meters høyde. Hver gang ballen treffer bakken, spretter den opp til en høyde som er 75 % av høyden den falt fra.

- c) Hvor mange meter vil ballen bevege seg totalt?

Oppgave 7 (6 poeng)

En likning for en kuleflate S er gitt ved

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z = 4$$

a) Bestem sentrum og radius til kuleflaten S .

En annen kuleflate K har sentrum i $(1, -1, 3)$ og radius 2.

Et plan α tangerer kuleflaten K i punktet $P(3, -1, 3)$.

b) Bestem en likning for plan α .

Et annet plan β er gitt ved

$$3x + y - 2z + 1 = 0$$

c) Avgjør om plan β vil skjære gjennom kuleflaten K .

Oppgave 8 (3 poeng)

Vis ved induksjon at

$$1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3} \quad \text{for } n \geq 0$$

DEL 2

Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)



En miniubåt passerer 250 meter under en bøye som ligger på havoverflaten.

I et koordinatsystem der x -aksen og y -aksen ligger parallelt med havoverflaten, z -aksen står normalt på havoverflaten, og enheten langs aksene er meter, er posisjonen til miniubåten t sekunder etter passeringen gitt ved

$$\vec{r}(t) = [6t, 7t, -250 - 5t + 0,1t^2] \quad \text{der} \quad t \in [0, 60]$$

- a) Bestem farten til miniubåten etter 2 sekunder.
- b) Hvor langt under havoverflaten er miniubåten på det dypeste?

Posisjonen til en fiskestim i området t sekunder etter at miniubåten passerte under bøyen, er gitt ved

$$\vec{s}(t) = [40 + 2t, 60 + 2t, -250] \quad \text{der} \quad t \in [0, 60]$$

Fiskestimen har en tilnærmet kuleform med radius på 15 meter. Miniubåten er 4 meter bred, 5 meter høy og 8 meter lang.

- c) Gjør beregninger og vurder om miniubåten kommer til å kollidere med fiskestimen.

Oppgave 2 (6 poeng)

Tabellen nedenfor viser elektrisk spenning målt i en stikkontakt i Norge.

Sekunder etter at målingene startet (t)	0,0020	0,0050	0,0070	0,0100	0,0130	0,0150	0,0180	0,0200
Målt spenning (U)	189	323	259	-2,12	-261	-327	-189	3,52

- a) Bestem en modell U for spenningen $U(t)$ volt (V) i stikkontakten t sekunder etter at målingene startet.
- b) På hvilke tidspunkter i løpet av de første 0,0200 sekundene er spenningen 230 V ifølge modellen?

Nettspenningen i Norge (den elektriske spenningen i vanlige stikkontakter) er 230 V.

Truls lurer på om målingene som er gjort, kan være riktige. Han finner ut at spenningen i kontakten er en vekselspenning. Det betyr at spenningen varierer periodisk med tiden. Når spenningen oppgis å være 230 V, er dette noe som kalles effektivverdien til spenningen og er gitt ved

$$U_{\text{effektiv}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (U(t))^2 dt}$$

der T er perioden til funksjonen U .

- c) Bruk modellen fra oppgave a og formelen ovenfor til å hjelpe Truls med å avgjøre om målingene kan være riktige.

Oppgave 3 (4 poeng)

Karbontetraklorid (CCl_4) er et skadelig stoff som brytes sakte ned i kroppen og delvis lagres i fettvev. Så lenge konsentrasjonen av CCl_4 i kroppen er under 10 enheter, klarer leveren å skille ut stoffet som normalt. Når konsentrasjonen overstiger 10 enheter, begynner ammoniakk å hope seg opp i blodet, og det blir potensielt farlig.

Sofie skal bo nær et gammelt industriområde der det har foregått ulovlig dumping av kjemikalier. Hver natt kommer hun til å puste inn CCl_4 som fordamper fra grunnen og kommer inn på soverommet hennes gjennom ventilasjon og sprekker i kjelleren.

Sofie utsettes for 2 enheter CCl_4 per natt. Vi regner med at kroppen hennes klarer å skille ut 18 % av total mengde i kroppen i løpet av en dag.

Anta at Sofie kun skiller ut CCl_4 når hun ikke blir utsatt for stoffet, og at hun bare blir utsatt for CCl_4 om natten.

- a) Regn ut hvor mange netter Sofie kan sove på soverommet sitt før konsentrasjonen av CCl_4 i kroppen hennes kommer opp på et potensielt farlig nivå.

Sofie leser en artikkel om CCl_4 der det blir påstått at en voksen person aldri vil ha mer enn 10 enheter av stoffet i kroppen dersom personen utsettes for 2 enheter CCl_4 per natt.

- b) Regn ut hvor mange prosent av mengden CCl_4 artikkelen antar at en voksen person skiller ut fra kroppen per dag.

Oppgave 4 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 3^{2x}$$

Programmet nedenfor beregner arealet avgrenset av grafen til f , x -aksen og linjene $x = 0$ og $x = 2$ ved hjelp av to ulike metoder.

```
1  start = 0
2  slutt = 2
3  n = 100
4
5  dx = (slutt-start)/n
6
7  def f(x):
8      |   return 3**(2*x)
9
10 def areal_til_hoyre():
11     |   areal = 0
12     |   for i in range(n):
13     |       |   x = start + i*dx
14     |       |   areal = areal + f(x)*dx
15     |   return areal
16
17 def areal_til_venstre():
18     |   areal = 0
19     |   for i in range(1, n+1):
20     |       |   x = start + i*dx
21     |       |   areal = areal + f(x)*dx
22     |   return areal
23
24 print(areal_til_hoyre())
25 print(areal_til_venstre())
```

- a) Forklar hvorfor den ene metoden vil gi en litt for høy verdi for arealet, og den andre metoden en litt for lav verdi.

- b) Lag et program som beregner arealet mer nøyaktig uten å dele det opp i flere deler. Ta utgangspunkt i koden nedenfor, og skriv ferdig funksjonen «bedre_metode()». Hvis du programmerer i et annet programmeringsspråk enn Python, må du først skrive en kode som samsvarer med koden nedenfor i språket du bruker.

Husk å legge ved skjermbilde av programmet du lager, og resultatet du får når du kjører programmet.

```
1  start = 0
2  slutt = 2
3  n = 100
4
5  dx = (slutt-start)/n
6
7  def f(x):
8      return 3**(2*x)
9
10 def bedre_metode():
11     areal = 0
12
13     #Skriv ny kode her
14
15     return areal
16
17 print(bedre_metode())
```