

24.05.2023

# Eksamen

REA3058 Matematikk R2

Se eksamenstips på baksiden!

# Nynorsk

| Eksamensinformasjon             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Eksamenstid</b>              | Eksamen varer i 5 timar.<br>Delen utan og delen med hjelpemiddel skal delast ut samstundes.<br>Delen utan hjelpemiddel skal leverast etter 2 timar.<br>Etter 2 timar kan kandidaten bruke hjelpemiddel.<br>Delen med hjelpemiddel skal leverast innan 5 timar.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <b>Del utan hjelpemiddel</b>    | Vanlege skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <b>Del med hjelpemiddel</b>     | Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Framgangsmåte</b>            | Delen utan hjelpemiddel har 5 oppgåver.<br>Delen med hjelpemiddel har 6 oppgåver.<br>Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Dersom oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, kan ein alternativ metode gi noko utteljing.<br>Bruk av digitale verktøy skal dokumenterast.                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Rettleiing om vurderinga</b> | Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du <ul style="list-style-type: none"><li>– viser rekneferdigheiter og matematisk forståing</li><li>– gjennomfører logiske resonnement</li><li>– ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar</li><li>– kan bruke hensiktsmessige hjelpemiddel</li><li>– forklarar framgangsmåtar og grunngir svar</li><li>– skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar</li><li>– vurderer om svar er rimelege</li></ul> |
| <b>Om vekting av oppgåvene</b>  | Alle deloppgåvene vert vekta likt.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Andre opplysningar</b>       | Teikningar og grafiske framstillingar:<br>Utdanningsdirektoratet                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |

## Del 1

### Utan hjelpemiddel

#### Oppgave 1

Rekn ut integrala

a)  $\int_{-1}^1 (4x^3 - x) dx$

b)  $\int_0^{\ln 2} e^{2x} dx$

#### Oppgave 2

a) Vis at dersom  $f(x) = \tan x$ , så er  $f'(x) = 1 + \tan^2 x$ .

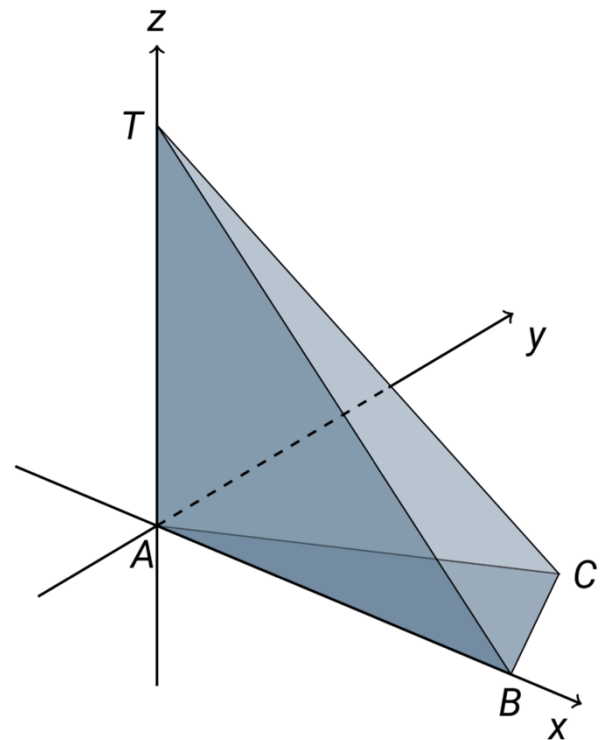
b) Rekn ut

$$\int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} dx.$$

### Oppgave 3

Punkta  $A(0,0,0)$ ,  $B(5,0,0)$ ,  $C(4,2,0)$  og  $T(0,0,5)$  danner ein pyramide, slik figuren viser.

- a) Rekn ut volumet av pyramiden.
- b) Rekn ut arealet av  $\triangle BCT$ .
- c) Bestem avstanden frå  $A$  til planet som går gjennom  $B$ ,  $C$  og  $T$ .



### Oppgave 4

Ein elev har skrive følgjande kode:

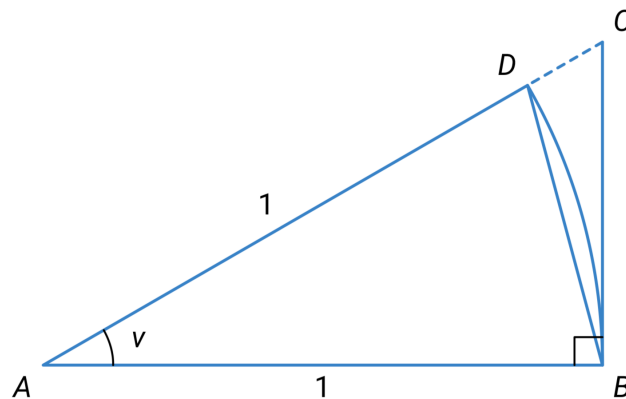
```
1 a = 3
2 d = 4
3
4 N = 10
5 S = 0
6
7 for i in range(N):
8     S = S + a
9     a = a + d
10
11 print(S)
```

- a) Forklar kva eleven vil rekne ut.
- b) Kva blir resultatet når ein køyrer programmet, dersom  $N$  blir sett til 100 i linje 4?

## Oppgave 5

I denne oppgave skal du vise at  $\lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{\sin v}{v} = 1$ .

I figuren nedanfor er  $AB = AD = 1$ , og bogen  $BD$  er del av ein sirkel med sentrum i  $A$ . Vi lar  $\angle BAC = v$  (målt i radianar).



a) Bruk arealbetraktningar til å grunngi at

$$\frac{1}{2} \sin v < \frac{1}{2} v < \frac{1}{2} \tan v$$

b) Forklar at dette gir oss

$$1 < \frac{v}{\sin v} < \frac{1}{\cos v}$$

c) Bruk ulikskapane frå oppgave b til å grunngi at  $\lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{\sin v}{v} = 1$ .

## Del 2

### Med hjelpemiddel

### Oppgave 1

Tabellen nedanfor viser kor mange millionar kroner som blei brukte på strøyming av musikk i Noreg nokre år i perioden 2008–2018.

| År        | 2008 | 2010 | 2012 | 2014 | 2016 | 2018 |
|-----------|------|------|------|------|------|------|
| Strøyming | 2    | 70   | 246  | 456  | 582  | 655  |

- a) Lag ein modell  $F$  som du kan bruke til å bestemme kor mange millionar kroner som blei brukte på strøyming i Noreg per år i perioden 2008–2018 og åra etterpå. Vel  $x$ -verdiar slik at  $F(0)$  gir kor mange millionar kroner som blei brukte i 2008. Grunngi valet av modell.

Nedanfor ser du fire formalar.

$$I = \int_{-0,5}^{10,5} F(x) dx, \quad G = \frac{1}{5} \int_{2,5}^{7,5} F(x) dx, \quad S = \sum_{i=0}^{10} F(i), \quad D = \frac{F(5,001) - F(5)}{0,001}$$

- b) Bestem  $I$ ,  $G$ ,  $S$  og  $D$ .
- c) Gi ei praktisk tolking av svara i oppgave b.

## Oppgave 2

Planet  $\alpha$  er bestemt av punkta  $A(1, 0, 3)$ ,  $B(0, 1, 2)$  og  $C(2, 3, 2)$ .

- a) Bestem ei likning for planet  $\beta$  som er parallelt med  $\alpha$  og går gjennom punktet  $P(2, -5, 5)$ .

Ei kule tangerer  $\alpha$  i punktet  $A$  og  $\beta$  i eit punkt  $Q$ .

- b) Bestem eksakte verdier for koordinatane til  $Q$ .

## Oppgave 3

Ein fabrikk lagar krokar ved hjelp av ein 3D-printer. Posisjonen til dysa i 3D-printeren etter  $t$  sekund er gitt ved posisjonsvektoren

$$\vec{r}(t) = \left[ 1 + e^{\frac{t}{20}}, 1 - \sin t, \frac{1}{10}e^{-2t+2} + \cos t \right], \quad t \in [0, 5]$$

Her er cm eininga langs aksane.

- a) Bestem banefarten til 3D-printeren etter 1 sekund.
- b) Ved kva for eit tidspunkt er banefarten lågast?
- c) Avgjer om fartsretninga nokon gong er parallell med  $xy$ -planet eller parallell med  $yz$ -planet. Hugs å grunngi svaret.

## Oppgave 4

Foreldra til David vil gi han vekepengar. Han får to ulike tilbod. I tilbod 1 får han 100 kroner den første veka. Beløpet  $a_n$  som han får i veka  $n$ , er gitt ved den rekursive formelen

$$a_n = a_{n-1} + 10.$$

I tilbod 2 får han 100 kroner den første veka. Beløpet  $b_n$  som han får i veka  $n$ , er gitt ved den rekursive formelen

$$b_n = b_{n-1} \cdot 1,05.$$

- Bestem det beløpet han får kvar veka dei fire første vekene med kvart av dei to tilboda.
- Kor mange veker tek det før tilbod 2 vil gi meir vekelønn enn tilbod 1?
- Kor mange veker tek det før tilbod 2 til saman vil gi meir lønn enn tilbod 1?

## Oppgave 5

Funksjonen  $f$  er gitt ved

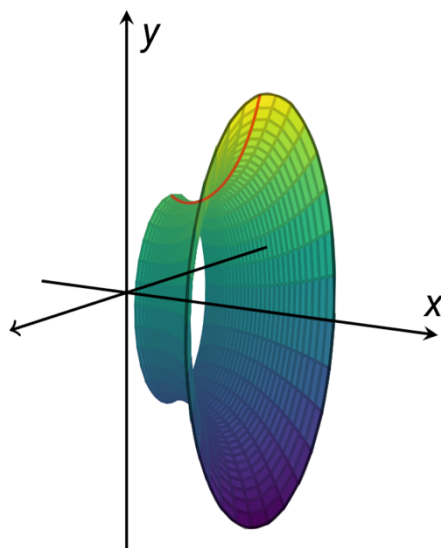
$$f(x) = \frac{2 - \cos x}{\sin x}, \quad D_f = \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

Vi roterer grafen til  $f$  om  $x$ -aksen.

- Bestem volumet av omdreingslekamen vi då får.

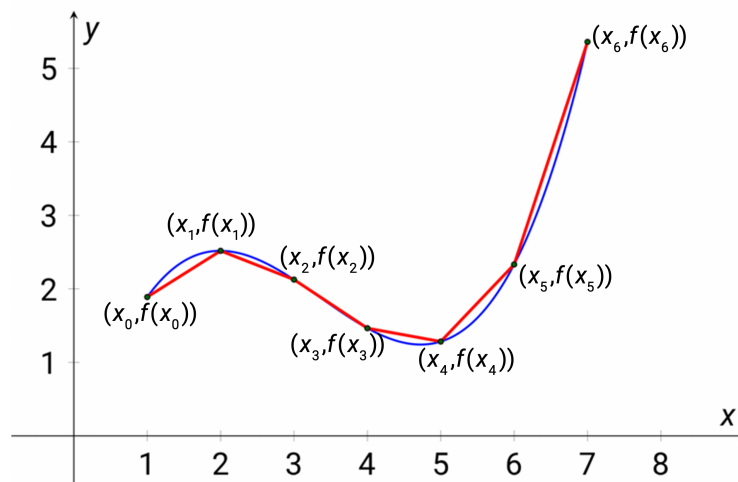
Omdreingslekamen skal plasserast i ei rett kjegle med radius 4 og volum 45.

- Avgjer om omdreingslekamen får plass i kjegla.



## Oppgave 6

For ein deriverbar funksjon  $f$  kan vi finne ein tilnærma verdi for lengda av grafen mellom to  $x$ -verdiar ved å bruke ei polylinje, slik figuren nedanfor illustrerer.

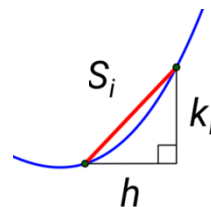


Dersom vi skal finne lengda av grafen i eit intervall  $[a, b]$ , kan vi dele dette intervallet i  $N$  like store delintervall  $[x_i, x_{i+1}]$  med breidd  $h = \frac{b-a}{N}$  og  $x_i = a + i \cdot h$ .

Vi reknar då ut lengdene av linjestykka som går mellom punkta  $(x_i, f(x_i))$  og  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ . Summen av desse lengdene vil då vere ein tilnærma verdi for lengda av grafen frå  $x = a$  til  $x = b$ .

- a) Forklar at lengda av linjestykket som går frå punktet  $(x_i, f(x_i))$  til punktet  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ , er gitt ved

$$S_i = \sqrt{h^2 + k_i^2}, \text{ der } k_i = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$



Funksjonen  $g$  er gitt ved

$$g(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad D_g = [-1, 1].$$

- b) Rekn ut ein god tilnærma verdi for lengda av grafen til  $g$  ved å bruke framgangsmåten som er beskriven ovanfor. Vurder om svaret er rimeleg.

### **TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:**

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

**Lykke til!**

### **TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:**

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

**Lykke til!**