

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer. Delen uten og delen med hjelpemidler skal deles ut samtidig. Delen uten hjelpemidler skal leveres etter 2 timer. Etter 2 timer kan kandidaten bruke hjelpemidler. Delen med hjelpemidler skal leveres innen 5 timer.
Del uten hjelpemidler	Vanlige skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler.
Del med hjelpemidler	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte	Delen uten hjelpemidler har 5 oppgaver. Delen med hjelpemidler har 6 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi noe uttelling. Bruk av digitale verktøy skal dokumenteres.
Veiledning om vurderingen	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger – vurderer om svar er rimelige
Om vekting av oppgavene	Alle deloppgavene vektes likt.
Andre opplysninger	Tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

Del 1

Uten hjelpemidler

Oppgave 1

Regn ut integralene

a) $\int_{-1}^1 (4x^3 - x) dx$

b) $\int_0^{\ln 2} e^{2x} dx$

Oppgave 2

a) Vis at dersom $f(x) = \tan x$, så er $f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

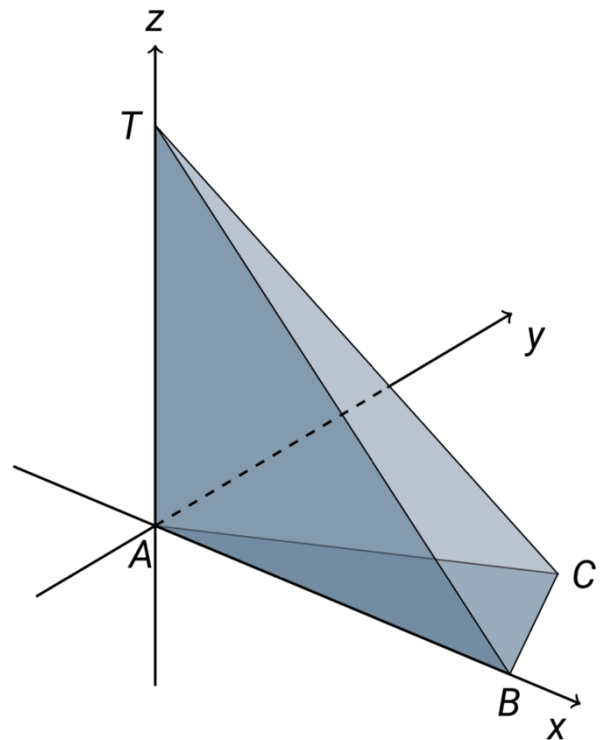
b) Regn ut

$$\int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} dx$$

Oppgave 3

Punktene $A(0,0,0)$, $B(5,0,0)$, $C(4,2,0)$ og $T(0,0,5)$ danner en pyramide, slik figuren viser.

- Regn ut volumet av pyramiden.
- Regn ut arealet av $\triangle BCT$.
- Bestem avstanden fra A til planet som går gjennom B , C og T .



Oppgave 4

En elev har skrevet følgende kode:

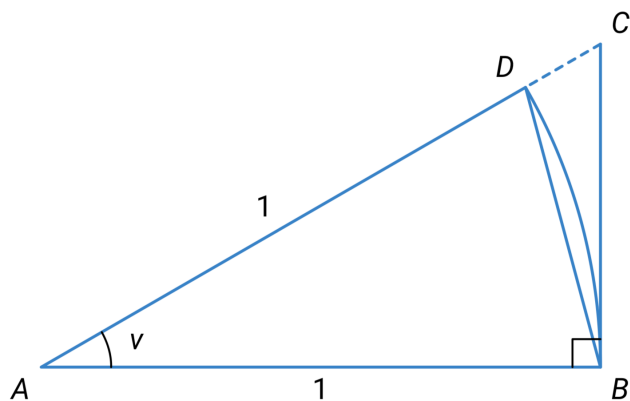
```
1 a = 3
2 d = 4
3
4 N = 10
5 S = 0
6
7 for i in range(N):
8     S = S + a
9     a = a + d
10
11 print(S)
```

- Forklar hva eleven ønsker å regne ut.
- Hva blir resultatet når programmet kjøres, dersom N settes til 100 i linje 4?

Oppgave 5

I denne oppgaven skal du vise at $\lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{\sin v}{v} = 1$.

I figuren nedenfor er $AB = AD = 1$, og buen BD er del av en sirkel med sentrum i A . Vi lar $\angle BAC = v$ (målt i radianer).



a) Bruk arealbetraktninger til å begrunne at

$$\frac{1}{2} \sin v < \frac{1}{2} v < \frac{1}{2} \tan v$$

b) Forklar at dette gir oss

$$1 < \frac{v}{\sin v} < \frac{1}{\cos v}$$

c) Bruk ulikhetene fra oppgave b til å begrunne at $\lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{\sin v}{v} = 1$.

Del 2

Med hjelpemidler

Oppgave 1

Tabellen nedenfor viser hvor mange millioner kroner som ble brukt på strømming av musikk i Norge noen år i perioden 2008–2018.

År	2008	2010	2012	2014	2016	2018
Strømming	2	70	246	456	582	655

- a) Lag en modell F som du kan bruke til å bestemme hvor mange millioner kroner som ble brukt på strømming i Norge per år i perioden 2008–2018 og årene etterpå. Velg x -verdier slik at $F(0)$ gir hvor mange millioner kroner som ble brukt i 2008. Begrunn valget av modell.

Nedenfor ser du fire formler.

$$I = \int_{-0,5}^{10,5} F(x) dx, \quad G = \frac{1}{5} \int_{2,5}^{7,5} F(x) dx, \quad S = \sum_{i=0}^{10} F(i), \quad D = \frac{F(5,001) - F(5)}{0,001}$$

- b) Bestem I , G , S og D .
- c) Gi en praktisk tolkning av svarene i oppgave b.

Oppgave 2

Planet α er bestemt av punktene $A(1, 0, 3)$, $B(0, 1, 2)$ og $C(2, 3, 2)$.

- a) Bestem en likning for planet β som er parallelt med α og går gjennom punktet $P(2, -5, 5)$.

En kule tangerer α i punktet A og β i et punkt Q .

- b) Bestem eksakte verdier for koordinatene til Q .

Oppgave 3

En fabrikk lager kroker ved hjelp av en 3D-printer. Posisjonen til dysen i 3D-printeren etter t sekunder er gitt ved posisjonsvektoren

$$\vec{r}(t) = \left[1 + e^{\frac{t}{20}}, 1 - \sin t, \frac{1}{10} e^{-2t+2} + \cos t \right], \quad t \in [0, 5]$$

Her er cm enheten langs aksene.

- a) Bestem banefarten til 3D-printeren etter 1 sekund.
- b) Ved hvilket tidspunkt er banefarten lavest?
- c) Avgjør om fartsretningen noen gang er parallell med xy -planet eller parallell med yz -planet. Husk å begrunne svaret.

Oppgave 4

Foreldrene til David vil gi ham ukepenges. Han får to ulike tilbud. I tilbud 1 får han 100 kroner den første uken. Beløpet a_n som han får i uke n , er gitt ved den rekursive formelen

$$a_n = a_{n-1} + 10$$

I tilbud 2 får han 100 kroner den første uken. Beløpet b_n som han får i uke n , er gitt ved den rekursive formelen

$$b_n = b_{n-1} \cdot 1,05$$

- Bestem det ukentlige beløpet han får de fire første ukene med hvert av de to tilbudene.
- Hvor mange uker tar det før tilbud 2 vil gi mer ukelønn enn tilbud 1?
- Hvor mange uker tar det før tilbud 2 til sammen vil gi mer lønn enn tilbud 1?

Oppgave 5

Funksjonen f er gitt ved

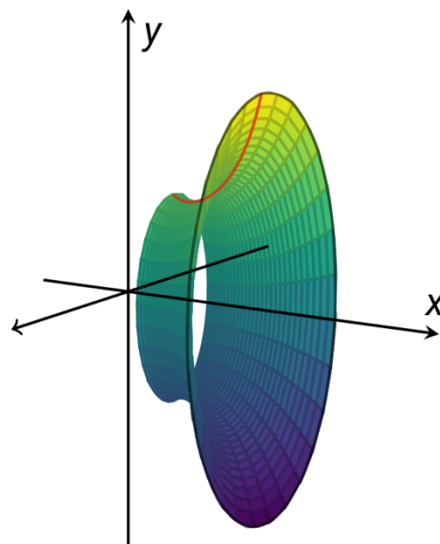
$$f(x) = \frac{2 - \cos x}{\sin x}, \quad D_f = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

Vi roterer grafen til f om x -aksen.

- Bestem volumet av omdreingslegemet vi da får.

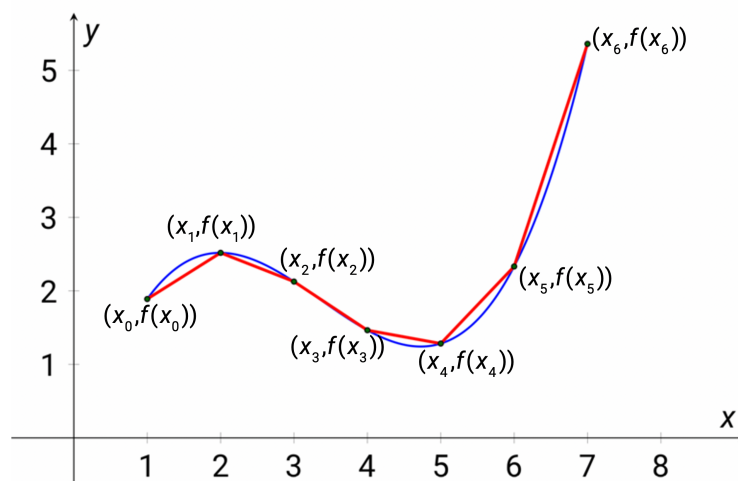
Omdreingslegemet skal plasseres i en rett kjegle med radius 4 og volum 45.

- Avgjør om omdreingslegemet får plass i kjeglen.



Oppgave 6

For en deriverbar funksjon f kan vi finne en tilnærmet verdi for lengden av grafen mellom to x -verdier ved å bruke en polylinje, slik figuren nedenfor illustrerer.

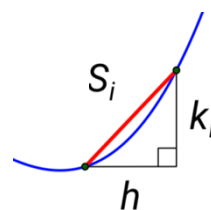


Dersom vi skal finne lengden av grafen i et intervall $[a, b]$, kan vi dele dette intervallet i N like store delintervall $[x_i, x_{i+1}]$ med bredde $h = \frac{b-a}{N}$ og $x_i = a + i \cdot h$.

Vi regner da ut lengdene av linjestykkene som går mellom punktene $(x_i, f(x_i))$ og $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Summen av disse lengdene vil da være en tilnærmet verdi for lengden av grafen fra $x = a$ til $x = b$.

- a) Forklar at lengden av linjestykket som går fra punktet $(x_i, f(x_i))$ til punktet $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, er gitt ved

$$S_i = \sqrt{h^2 + k_i^2}, \text{ der } k_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$



Funksjonen g er gitt ved

$$g(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad D_g = [-1, 1]$$

- b) Regn ut en god tilnærmet verdi for lengden av grafen til g ved å bruke framgangsmåten beskrevet ovenfor. Vurder om svaret er rimelig.

Blank side

Blank side