

# Oppgave 1 - Løsning

---

**Oppgave:** Vis at formelen  $2 \cdot \sin(u) \cdot \cos(u) = \sin(2u)$  gjelder når  $u = 30^\circ$ , ved å bruke den gitte trekanten.

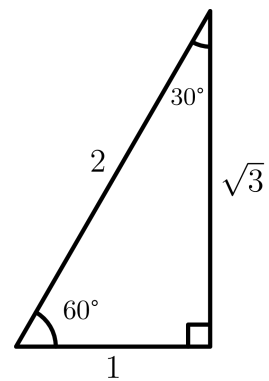
## Steg 1: Finn trigonometriske verdier fra trekanten

Fra den rettvinklede trekanten med vinkler  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  og  $90^\circ$ :

For vinkelen  $u = 30^\circ$ :

$$\sin(30^\circ) = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



## Steg 2: Regn ut venstre side

$$2 \cdot \sin(30^\circ) \cdot \cos(30^\circ) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

## Steg 3: Regn ut høyre side

Når  $u = 30^\circ$ , blir  $2u = 60^\circ$ .

Fra trekanten:

$$\sin(60^\circ) = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

## Steg 4: Sammenlign

$$\text{Venstre side: } 2 \cdot \sin(30^\circ) \cdot \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Høyre side: } \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Konklusjon:** Venstre side = Høyre side =  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Formelen  $2 \cdot \sin(u) \cdot \cos(u) = \sin(2u)$  er verifisert for  $u = 30^\circ$ .

## Oppgave 2 - Løsning

---

**Oppgave:** Funksjonen  $f$  er gitt ved  $f(x) = (x - 1)(x + 3)$ . Bestem koordinatene til bunnpunktet på grafen til  $f$ .

### Metode: Bruk nullpunktene

For en andregradsfunksjon på formen  $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$  ligger bunnpunktet (eller toppunktet) midt mellom nullpunktene.

### Steg 1: Finn nullpunktene

Fra den faktoriserte formen  $f(x) = (x - 1)(x + 3)$  kan vi lese av nullpunktene direkte:

$$x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$$

$$x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -3$$

### Steg 2: Finn x-koordinaten til bunnpunktet

x-koordinaten til bunnpunktet er gjennomsnittet av nullpunktene:

$$x_b = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + (-3)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

### Steg 3: Finn y-koordinaten til bunnpunktet

Sett  $x = -1$  inn i funksjonen:

$$f(-1) = ((-1) - 1)((-1) + 3) = (-2) \cdot 2 = -4$$

**Svar:** Bunnpunktet har koordinatene  $\boxed{(-1, -4)}$

## Oppgave 3 - Løsning

**Oppgave:** Funksjonen  $f$  er gitt ved  $f(x) = x^3 + 7x^2 + 4x - 12$ . Løs ulikheten  $f(x) < 0$  og illustrer løsningen grafisk ved å lage en skisse.

### Steg 1: Faktoriser polynomet

Vi prøver å finne en rot ved å teste enkle verdier:

$$f(1) = 1^3 + 7 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 12 = 1 + 7 + 4 - 12 = 0 \quad \checkmark$$

Siden  $f(1) = 0$ , er  $x = 1$  en rot, og  $(x - 1)$  er en faktor.

### Steg 2: Polynomdivisjon

Vi deler  $x^3 + 7x^2 + 4x - 12$  på  $(x - 1)$ :

$$(x^3 + 7x^2 + 4x - 12) \div (x - 1) = x^2 + 8x + 12$$

$$\begin{array}{r} x^3 \quad + 7x^2 \quad + 4x \quad - 12 \\ -(x^3 \quad - x^2) \\ \hline \quad 8x^2 \quad + 4x \quad - 12 \\ -(8x^2 \quad - 8x) \\ \hline \quad \quad 12x \quad - 12 \\ -(12x \quad - 12) \\ \hline \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

**Resultat:**

$$x^3 + 7x^2 + 4x - 12 = (x - 1)(x^2 + 8x + 12)$$

### Steg 3: Faktoriser andregradsuttrykket

$$x^2 + 8x + 12 = (x + 2)(x + 6)$$

Fullstendig faktorisering:

$$f(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 6)$$

### Steg 4: Finn nullpunktene

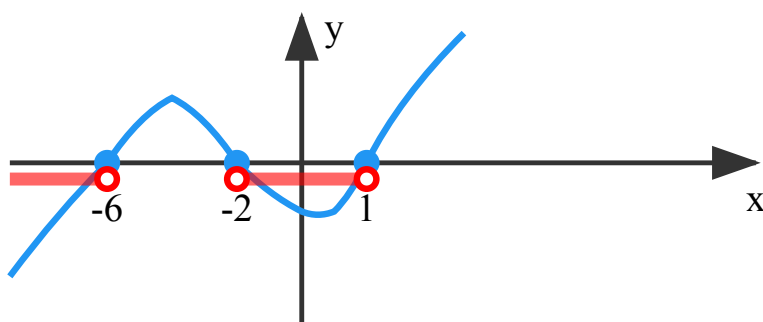
Nullpunktene er:  $x = 1$ ,  $x = -2$ , og  $x = -6$

### Steg 5: Fortegnsskjema

For et tredjegradspolynom med positiv ledende koeffisient:

| $x$    | $x < -6$ | $-6$ | $-6 < x < -2$ | $-2$ | $-2 < x < 1$ | $1$ | $x > 1$ |
|--------|----------|------|---------------|------|--------------|-----|---------|
| $f(x)$ | $-$      | $0$  | $+$           | $0$  | $-$          | $0$ | $+$     |

### Steg 6: Grafisk illustrasjon



Røde områder viser hvor  $f(x) < 0$

**Svar:**  $f(x) < 0$  når

$$x < -6 \quad \text{eller} \quad -2 < x < 1$$

På intervallform:  $x \in \langle \leftarrow, -6 \rangle \cup \langle -2, 1 \rangle$

## Oppgave 4 - Løsning

**Oppgave:** I koordinatsystemet har vi en sirkel med radius  $r = 1$ . Punktet  $P(0,64, 0,77)$  ligger på sirkelen ved vinkelen  $50^\circ$ .

- a) Er  $\tan 50^\circ > 1$ ? Husk å begrunne svaret ditt.
- b) Er  $\tan 130^\circ > 0$ ? Husk å begrunne svaret ditt.

### Bakgrunn: Enhetssirkelen

For enhetssirkelen (radius = 1) gjelder:

- $\cos(\theta) = x$ -koordinaten
- $\sin(\theta) = y$ -koordinaten
- $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{y}{x}$

Fra figuren:  $P(0,64, 0,77)$  ligger ved  $50^\circ$ , så  $\cos(50^\circ) = 0,64$  og  $\sin(50^\circ) = 0,77$ .

**a) Er  $\tan 50^\circ > 1$ ?**

$$\tan(50^\circ) = \frac{\sin(50^\circ)}{\cos(50^\circ)} = \frac{0,77}{0,64} \approx 1,20$$

Siden  $\sin(50^\circ) = 0,77 > 0,64 = \cos(50^\circ)$ , blir brøken større enn 1.

**Svar a):** Ja,  $\tan 50^\circ > 1$  fordi  $\sin(50^\circ) > \cos(50^\circ)$ .

**b) Er  $\tan 130^\circ > 0$ ?**

$130^\circ$  ligger i **andre kvadrant** (mellom  $90^\circ$  og  $180^\circ$ ).

I andre kvadrant:

- $\sin(130^\circ) > 0$  (y-koordinaten er positiv)
- $\cos(130^\circ) < 0$  (x-koordinaten er negativ)

$$\tan(130^\circ) = \frac{\sin(130^\circ)}{\cos(130^\circ)} = \frac{\text{positiv}}{\text{negativ}} = \text{negativ}$$

**Svar b):** Nei,  $\tan 130^\circ < 0$  fordi i andre kvadrant er sinus positiv og cosinus negativ, noe som gir negativ tangens.

## DEL 2

### Med hjelpemidler

#### Oppgave 1 - Løsning

**Oppgave:** Funksjonen  $P(x) = 3600 \cdot 0,85^x + 600$  viser antall personer som abonnerer på papirutgaven av en avis  $x$  år etter 2010.

##### a) Antall abonnenter i 2010 (to metoder)

###### Metode 1: Sett inn $x = 0$

I 2010 er  $x = 0$ :

$$P(0) = 3600 \cdot 0,85^0 + 600 = 3600 \cdot 1 + 600 = 4200$$

###### Metode 2: Tolkning av funksjonsuttrykket

Funksjonen  $P(x) = 3600 \cdot 0,85^x + 600$  er på formen  $a \cdot b^x + c$ .

Startverdien (når  $x = 0$ ) er  $a + c = 3600 + 600 = 4200$ .

**Svar a):** Det var **4200** abonnenter på papirutgaven i 2010.

##### b) Stigningstall til sekanten

Vi finner først funksjonsverdiene:

$$P(4) = 3600 \cdot 0,85^4 + 600 = 3600 \cdot 0,522 + 600 \approx 2479$$

$$P(14) = 3600 \cdot 0,85^{14} + 600 = 3600 \cdot 0,103 + 600 \approx 971$$

Stigningstallet til linjen gjennom  $(4, P(4))$  og  $(14, P(14))$ :

$$a = \frac{P(14) - P(4)}{14 - 4} = \frac{971 - 2479}{10} = \frac{-1508}{10} = -150,8$$

**Svar b):** Stigningstallet er  $\approx -151$ .

**Praktisk tolkning:** I gjennomsnitt mistet papirutgaven ca. 151 abonnenter per år i perioden fra 2014 til 2024.

**c) Momentan vekstfart når  $x = 10$**

Vi deriverer  $P(x)$ :

$$P'(x) = 3600 \cdot 0,85^x \cdot \ln(0,85) = 3600 \cdot \ln(0,85) \cdot 0,85^x$$

Vi setter inn  $x = 10$ :

$$P'(10) = 3600 \cdot \ln(0,85) \cdot 0,85^{10} \approx 3600 \cdot (-0,1625) \cdot 0,1969 \approx -115,2$$

**Svar c):** Den momentane vekstfarten når  $x = 10$  er  $\approx -115$ .

**Praktisk tolkning:** I 2020 (når  $x = 10$ ) minket antall papirabonnenter med ca. 115 personer per år.

**d) Når overstiger digital papir?**

Digital i 2019: 1000 abonnenter. Vokser med 5,5% per år.

Modell for digital ( $t = \text{år etter 2019}$ ):

$$D(t) = 1000 \cdot 1,055^t$$

Vi må sammenligne med papir. År 2019 tilsvarer  $x = 9$  i  $P(x)$ .

For år  $t$  etter 2019 (dvs.  $x = 9 + t$ ):

$$P(9 + t) = 3600 \cdot 0,85^{9+t} + 600$$

Vi løser  $D(t) = P(9 + t)$ :

$$1000 \cdot 1,055^t = 3600 \cdot 0,85^{9+t} + 600$$

Ved numerisk løsning (CAS/grafisk) får vi  $t \approx 3,1$ .

År:  $2019 + 3,1 \approx 2022$

**Svar d):** Det var for første gang flere digitale abonnenter enn papirabonnenter i 2022.

## Oppgave 2 - Løsning

---

**Oppgave:** Maria lager en stjerne av 12 likesidede trekanter med sidelengde 4. Ved Pytagoras har hun funnet at arealet er  $48\sqrt{3}$ . Vis at du kan komme fram til samme resultat ved å bruke trigonometri.

### Løsning med trigonometri

For en likesidet trekant med side  $s$  er alle vinkler  $60^\circ$ .

**Arealformel med trigonometri:**

$$A = \frac{1}{2} \cdot s \cdot s \cdot \sin(60^\circ) = \frac{1}{2} s^2 \sin(60^\circ)$$

Med  $s = 4$ :

$$A_{\text{én trekant}} = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \sin(60^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

Totalt areal for 12 trekanter:

$$A_{\text{total}} = 12 \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$$

**Svar:** Ved å bruke arealformelen  $A = \frac{1}{2}ab \sin(C)$  får vi arealet  $48\sqrt{3}$ , som stemmer med Marias svar.

## Oppgave 3 - Løsning

**Oppgave:** En rasjonal funksjon  $f$  har asymptotene  $x = 2$  og  $y = 4$ . Nullpunktet er  $x = -3$ . Bestem et mulig funksjonsuttrykk  $f(x)$ .

### Resonnement

**Vertikal asymptote  $x = 2$ :** Nevneren må ha en faktor  $(x - 2)$ .

**Horisontal asymptote  $y = 4$ :** Forholdet mellom ledende koeffisienter i teller og nevner må være 4.

**Nullpunkt  $x = -3$ :** Telleren må ha en faktor  $(x + 3)$ .

### Konstruksjon av funksjonen

Vi starter med grunnformen:

$$f(x) = \frac{a(x + 3)}{x - 2}$$

For at den horisontale asymptoten skal være  $y = 4$ , må  $a = 4$ :

$$f(x) = \frac{4(x + 3)}{x - 2} = \frac{4x + 12}{x - 2}$$

### Verifisering

- Vertikal asymptote:  $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$  ✓
- Horisontal asymptote:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+12}{x-2} = \frac{4}{1} = 4$  ✓
- Nullpunkt:  $4x + 12 = 0 \Rightarrow x = -3$  ✓

**Svar:** Et mulig funksjonsuttrykk er

$$f(x) = \frac{4(x + 3)}{x - 2} = \frac{4x + 12}{x - 2}$$

## Oppgave 4 - Løsning

**Oppgave:**  $n!$  ( $n$  fakultet) er produktet av alle naturlige tall fra 1 til  $n$ .

- Lag et program som regner ut  $n!$ . Bruk det til å regne ut  $5!$ ,  $10!$  og  $15!$
- Gjør rede for hvilke faktorer som gjør at det er 24 nuller i slutten av  $100!$

### a) Program for $n!$

```
def fakultet(n):
    resultat = 1
    for i in range(1, n + 1):
        resultat = resultat * i
    return resultat

print("5! =", fakultet(5))
print("10! =", fakultet(10))
print("15! =", fakultet(15))
```

### Resultater:

$$5! = 120$$

$$10! = 3\,628\,800$$

$$15! = 1\,307\,674\,368\,000$$

**Svar a):**  $5! = 120$ ,  $10! = 3\,628\,800$ ,  $15! = 1\,307\,674\,368\,000$

### b) Antall nuller i $100!$

En null på slutten kommer fra faktoren  $10 = 2 \times 5$ .

Det er mange flere faktorer av 2 enn 5 i  $100!$ , så antall nuller bestemmes av antall faktorer av 5.

### Vi teller faktorer av 5:

- Tall delelig med 5:  $\lfloor 100/5 \rfloor = 20$  (gir 20 faktorer av 5)
- Tall delelig med 25:  $\lfloor 100/25 \rfloor = 4$  (gir 4 ekstra faktorer av 5)
- Tall delelig med 125:  $\lfloor 100/125 \rfloor = 0$

Totalt antall faktorer av 5:

$$20 + 4 + 0 = 24$$

**Svar b):** 100! har **24 nuller** på slutten fordi det er 24 faktorer av 5 i produktet. Tallene 5, 10, 15, ..., 100 bidrar med én faktor av 5 hver (20 stk), og tallene 25, 50, 75, 100 bidrar med én ekstra faktor av 5 hver (4 stk).

## Oppgave 5 - Løsning

---

**Oppgave:** Tredjegradsfunksjonen  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  oppfyller:

- Grafen går gjennom punktet  $(2, 6)$
- Punktet  $(-2, 8)$  er et toppunkt
- Tangenten i punktet  $(3, f(3))$  har stigningstall 4

Bestem  $a$ ,  $b$ ,  $c$  og  $d$ .

### Setter opp likningssystem

Den deriverte er  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ .

**Likning 1:** Grafen går gjennom punktet  $(2, 6)$ , derfor er  $f(2) = 6$ :

$$a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 6 \quad \Rightarrow \quad 8a + 4b + 2c + d = 6$$

**Likning 2:** Punktet  $(-2, 8)$  er et toppunkt, så grafen går gjennom dette punktet. Derfor er  $f(-2) = 8$ :

$$a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d = 8 \quad \Rightarrow \quad -8a + 4b - 2c + d = 8$$

**Likning 3:** Siden  $(-2, 8)$  er et toppunkt, er tangenten horisontal der. Derfor er  $f'(-2) = 0$ :

$$3a \cdot (-2)^2 + 2b \cdot (-2) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 12a - 4b + c = 0$$

**Likning 4:** Tangenten i punktet  $(3, f(3))$  har stigningstall 4, derfor er  $f'(3) = 4$ :

$$3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 + c = 4 \quad \Rightarrow \quad 27a + 6b + c = 4$$

### Løser likningssystemet med CAS

Vi bruker GeoGebra CAS til å løse likningssystemet:

**CAS** **Løs**  
Løser en eller flere likninger i valgte linjer

|   |                                                                                                                                                |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $\rightarrow f(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d$                                                                                                  |
| 2 | $f(2)=6$<br>$\rightarrow 8 a + 4 b + 2 c + d = 6$                                                                                              |
| 3 | $f(-2)=8$<br>$\rightarrow -8 a + 4 b - 2 c + d = 8$                                                                                            |
| 4 | $f'(-2)=0$<br>$\rightarrow 12 a - 4 b + c = 0$                                                                                                 |
| 5 | $f'(3)=4$<br>$\rightarrow 27 a + 6 b + c = 4$                                                                                                  |
| 6 | $\{\$2, \$3, \$4, \$5\}$<br>Løs: $\left\{ \left\{ a = \frac{3}{20}, b = \frac{7}{40}, c = -\frac{11}{10}, d = \frac{63}{10} \right\} \right\}$ |
| 7 |                                                                                                                                                |

**Svar:**  $a = \frac{3}{20}, \quad b = \frac{7}{40}, \quad c = -\frac{11}{10}, \quad d = \frac{63}{10}$

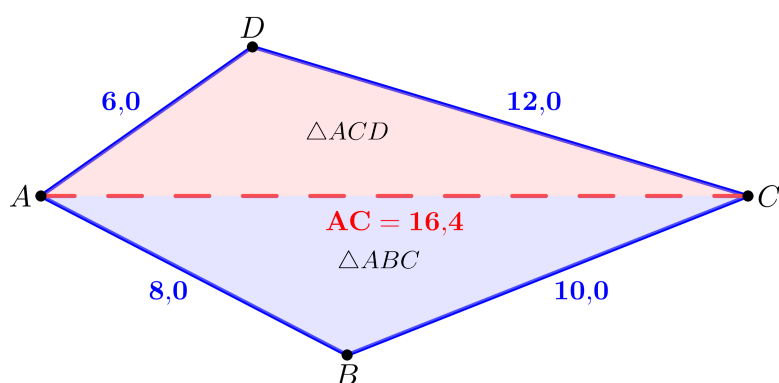
## Oppgave 6 - Løsning

**Oppgave:** Figuren ABCD har  $AD = 6,0$ ,  $BC = 10,0$ ,  $AC = 16,4$ ,  $DC = 12,0$ ,  $AB = 8,0$ .

a) Isabel: Bruk sidelengdene til å finne arealet.

b) Anniken: Bruk vinklene  $\angle A = 62,5^\circ$ ,  $\angle C = 38,3^\circ$ ,  $\angle ABD = 45,5^\circ$ ,  $\angle CBD = 85,5^\circ$  til å finne arealet.

### a) Isabels metode (med sidelengder)



a) Isabels metode: Bruk sidelengdene

### Kjent informasjon fra oppgaven:

- $AD = 6,0$ ,  $BC = 10,0$ ,  $AC = 16,4$ ,  $DC = 12,0$ ,  $AB = 8,0$

Vi deler firkanten i to trekanter ved diagonalen  $AC$ : trekant  $\triangle ADC$  og trekant  $\triangle ABC$ .

### Cosinussetningen

For en trekant med sider  $a$ ,  $b$ ,  $c$  og vinkel  $C$  (motsatt side  $c$ ) gjelder:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C)$$

### Arealsetningen

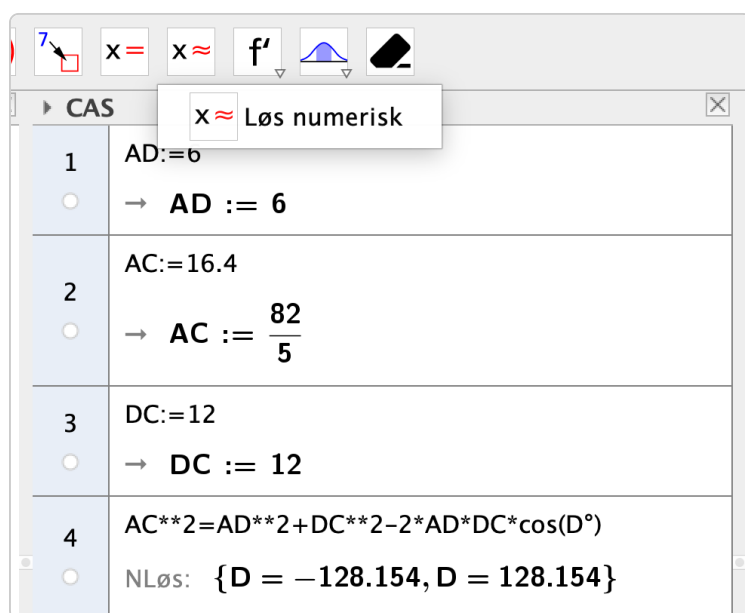
Arealet av en trekant med to sider  $a$  og  $b$  og mellomliggende vinkel  $C$  er:

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$$

## Beregning med GeoGebra CAS

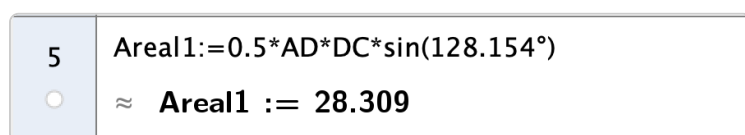
### Trekant ADC:

Vi definerer sidelengdene og bruker cosinussetningen til å finne vinkel  $D$ :



Fra CAS:  $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos(D)$  gir  $D = 128,154^\circ$

Arealet av  $\triangle ADC$  med arealsetningen:



$$\text{Areal}_1 = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot \sin(128,154^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 \cdot \sin(128,154^\circ) \approx 28,31$$

### Trekant ABC:

Vi bruker samme fremgangsmåte for trekant  $ABC$ :

|   |                                                                        |
|---|------------------------------------------------------------------------|
| 6 | AB:=8<br>≈ AB := 8                                                     |
| 7 | BC:=10<br>≈ BC := 10                                                   |
| 8 | AC**2=AB**2+BC**2-2*AB*BC*cos(B°)<br>NLøs: {B = -130.996, B = 130.996} |
| 9 | Areal2:= 0.5*AB*BC*sin(130.996°)<br>≈ Areal2 := 30.19                  |

Fra CAS:  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(B)$  gir  $B = 130,996^\circ$

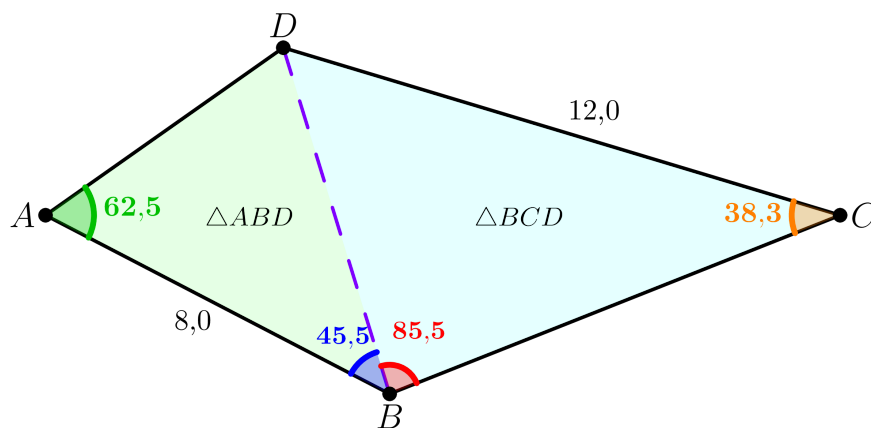
$$\text{Areal}_2 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin(130,996^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \sin(130,996^\circ) \approx 30,19$$

**Totalt areal:**

|    |                                           |
|----|-------------------------------------------|
| 10 | Areal:=Areal1+Areal2<br>≈ Areal := 58.499 |
|----|-------------------------------------------|

**Svar a):** Arealet er  $\text{Areal}_1 + \text{Areal}_2 \approx 28,31 + 30,19 = \boxed{58,5}$

**b) Annikens metode (med vinkler)**



Annikens metode: Bruk vinklene

**Kjent informasjon:**

- Fra figuren:  $AB = 8,0$  og  $DC = 12,0$
- Vinkler:  $\angle DAB = 62,5^\circ$ ,  $\angle BCD = 38,3^\circ$ ,  $\angle ABD = 45,5^\circ$ ,  $\angle DBC = 85,5^\circ$

Vi deler firkanten i to trekanter ved diagonalen  $BD$ .

## Sinussetningen

For en trekant med sider  $a, b, c$  og motstående vinkler  $A, B, C$  gjelder:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

## Beregning med GeoGebra CAS

### Trekant ABD:

Vinkelsummen gir:  $\angle ADB = 180^\circ - 62,5^\circ - 45,5^\circ = 72^\circ$

Vi bruker sinussetningen til å finne  $AD$ :

|                       |                                        |
|-----------------------|----------------------------------------|
| 1                     | $AD/\sin(45.5^\circ)=8/\sin(72^\circ)$ |
| <input type="radio"/> | NLøs: <b>{AD = 6}</b>                  |

Areal av  $\triangle ABD$  med arealsetningen:

|                       |                                              |
|-----------------------|----------------------------------------------|
| 2                     | $\text{Areal\_1}:=0.5*8*6*\sin(62.5^\circ)$  |
| <input type="radio"/> | $\approx$ <b>Areal<sub>1</sub> := 21.288</b> |

$$A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin(\angle DAB) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \sin(62,5^\circ) \approx 21,29$$

### Trekant BCD:

Vinkelsummen gir:  $\angle BDC = 180^\circ - 38,3^\circ - 85,5^\circ = 56,2^\circ$

Vi bruker sinussetningen til å finne  $BC$ :

|   |                                                                         |
|---|-------------------------------------------------------------------------|
| 3 | $BC/\sin(56.2^\circ)=12/\sin(85.5^\circ)$<br>NLøs: <b>{BC = 10.003}</b> |
|---|-------------------------------------------------------------------------|

Areal av  $\triangle BCD$  med arealsetningen:

|   |                                                                                    |
|---|------------------------------------------------------------------------------------|
| 4 | $\text{Areal}_2:=0.5*12*10*\sin(38.3^\circ)$<br>$\approx \text{Areal}_2 := 37.187$ |
|---|------------------------------------------------------------------------------------|

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot BC \cdot \sin(\angle BCD) = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \cdot \sin(38,3^\circ) \approx 37,19$$

**Totalt areal:**

|   |                                                                                 |
|---|---------------------------------------------------------------------------------|
| 5 | $\text{Areal}=\text{Areal}_1+\text{Areal}_2$<br>$\approx \text{Areal} = 58.475$ |
|---|---------------------------------------------------------------------------------|

**Svar b):** Arealet er  $A_{ABD} + A_{BCD} \approx 21,29 + 37,19 = \boxed{58,5}$

## Oppgave 7 - Løsning

---

**Oppgave:** Else skal lage en grønnsakhage med tre områder: et rektangel i midten og to likebeinte rettvinklede trekanter på sidene. Hun har 100 m gjerde totalt.

### Oppsett av problemet

La  $x$  være katetene i trekantene og  $y$  være bredden på rektangelet. Høyden på rektangelet er da også  $x$ .

### Gjerde (alle linjer):

- Bunn:  $x + y + x = 2x + y$
- To hypotenususer:  $2 \cdot x\sqrt{2} = 2\sqrt{2}x$
- Topp av rektangel:  $y$
- To indre vertikale vegger:  $2x$

### Total gjerde:

$$2x + y + 2\sqrt{2}x + y + 2x = (4 + 2\sqrt{2})x + 2y = 100$$

Vi løser for  $y$ :

$$y = \frac{100 - (4 + 2\sqrt{2})x}{2} = 50 - (2 + \sqrt{2})x$$

### Areal:

$$A = \text{rektangel} + 2 \text{ trekanter} = xy + 2 \cdot \frac{x^2}{2} = xy + x^2$$

### a) Areal når $x = 8$ m

Først finner vi  $y$ :

$$y = 50 - (2 + \sqrt{2}) \cdot 8 = 50 - (2 + 1,414) \cdot 8 = 50 - 27,31 = 22,69 \text{ m}$$

Arealet blir:

$$A = xy + x^2 = 8 \cdot 22,69 + 8^2 = 181,5 + 64 = 245,5 \text{ m}^2$$

**Svar a):** Arealet blir  $245,5 \text{ m}^2$  når katetene er 8 m.

**b) Oversikt over areal for ulike verdier av  $x$**

| $x \text{ (m)}$ | $y \text{ (m)}$ | $A \text{ (m}^2\text{)}$ |
|-----------------|-----------------|--------------------------|
| 4               | 36,3            | 161,4                    |
| 6               | 29,5            | 213,1                    |
| 8               | 22,7            | 245,5                    |
| <b>10</b>       | <b>15,9</b>     | <b>258,6</b>             |
| 12              | 9,0             | 252,5                    |
| 14              | 2,2             | 227,1                    |

**Svar b):** Tabellen viser at arealet er størst når  $x \approx 10 \text{ m}$ .

**c) Modell for arealet  $A(x)$**

Vi setter uttrykket for  $y$  inn i arealformelen:

$$A(x) = x \cdot (50 - (2 + \sqrt{2})x) + x^2$$

$$A(x) = 50x - (2 + \sqrt{2})x^2 + x^2 = 50x - (1 + \sqrt{2})x^2$$

**Svar c):** Modellen er  $A(x) = 50x - (1 + \sqrt{2})x^2$

**d) Maksimalt areal**

Vi deriverer og setter lik null:

$$A'(x) = 50 - 2(1 + \sqrt{2})x = 0$$

$$x = \frac{50}{2(1 + \sqrt{2})} = \frac{25}{1 + \sqrt{2}}$$

Vi rasjonaliserer nevneren:

$$x = \frac{25}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{25(1 - \sqrt{2})}{1 - 2} = \frac{25(1 - \sqrt{2})}{-1} = 25(\sqrt{2} - 1)$$

$$x = 25(\sqrt{2} - 1) \approx 25 \cdot 0,414 \approx 10,36 \text{ m}$$

**Svar d):** Katetlengden som gir størst areal er  $x = 25(\sqrt{2} - 1) \approx 10,4 \text{ m}$

### e) Gyldighetsområde

Vi må ha:

- $x > 0$  (katetene må ha positiv lengde)
- $y > 0$  (rektangelet må ha positiv bredde)

Fra  $y > 0$ :

$$50 - (2 + \sqrt{2})x > 0$$

$$x < \frac{50}{2 + \sqrt{2}} = \frac{50}{3,414} \approx 14,64$$

**Svar e):** Gyldighetsområdet er  $0 < x < \frac{50}{2 + \sqrt{2}} \approx 14,6 \text{ m}$